Fregeläisen logiikan yleistys ja yhdenmukaiset mallit

Pro gradu
Heikki Koivupalo 11. 2. 2013
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Apuna LaTeX & Vim

Sisällysluettelo

1. Alustus

Venuksen kirtorata on Maan kiertoradan sisäpuolella, joten Venus on aina kohtuullisen lähellä Aurinkoa. Kun Aurinko laskee ja illalla tulee pimeää, Venus näkyy jonkin aikaa taivaalla kirkkaana pisteenä. Tämän takia Venusta kutsutaan iltatähdeksi. Kun Aurinko puolestaan nousee, Venus näkyy taivaalla jonkin aikaa ennen kuin se hukkuu päivänvaloon. Tämän takia Venusta kutsutaan aamutähdeksi. 'Iltatähti' ja 'aamutähti' ovat siis kaksi eri nimeä, joilla viittaamme yhteen olioon, Venukseen.

Teoksessaan *Über Sinn und Bedeutung*[7] Gottlob Frege (1848-1925) tekee erottelun nimen merkitykseen ja referenssiin. Referenssi on se olio, johon nimi viittaa. Edellisen kappaleen esimerkkiä mukaillen nimen 'iltatähti' referenssi on planeetta Venus. Tietysti myös nimillä 'Venus' ja 'aamutähti' on sama, yhteinen referenssi, Venus. Nimen merkitys puolestaan on se tapa, jolla nimi viittaa olioon. Fregen tekemä erottelu on hyödyllinen, koska jo synonyymien puolesta on paljon nimiä, joilla on sama referenssi mutta eri merkitys. Lisäksi se auttaa ymmärtämään, miksi identiteetti-ilmaisut ovat mielekkäitä.

Ajatellaan seuraavaksi lausetta 'iltatähti on Venus'.[†] Onko sillä referenssiä? Frege toteaa:

> **1.1.** *Oletetaan hetkeksi, että lauseella on referenssi. Jos nyt korvaamme yhden sanan lauseesta toisella sanalla, jolla on sama referenssi mutta eri merkitys, tämä ei voi vaikuttaa lauseen referenssiin."*

Fregen mukaan siis lauseilla

- 'iltatähti on Venus' ja
- 'aamutähti on Venus'

on sama referenssi. Jokin lauseessa kuitenkin muuttuu, ja se jokin on lauseen merkitys. Eräs taas pysyy samana: kummankin lauseen totuusarvo on tosi. Kyseessä on väitelause, ja kun kyseessä on väitelause, on syytä kysyä, mikä on kyseisen lauseen totuusarvo. Jos taas kyseessä on esimerkiksi runoudessa esiintyvä lause, lukija ei ole kiinnostunut niinkään lauseen referenssistä vaan enemmänkin merkityksestä ja niistä tunteista, joita kyseinen lause herättää. Jos lauseella kuitenkin on referenssi, se on totuusarvo tosi tai epätosi. Edellistä lausetta – siis sitä joka alkoi isolla

[†]On hyvä pitää mielessä, että myös lauseet ovat nimiä Fregelle.

alkukirjaimella J ja päättyi pisteeseen . – kutsutaan fregeläiseksi otaksumaksi. Tässä työssä ollaan kiinnostuneita vain sellaisista lauseista, joilla on referenssi. Oletetaan siis jatkossa, että lauseilla on referenssi.

Fregeläisessä logiikassa kaikilla tosilla lauseilla on siis yksi yhteinen referenssi. Fregeläisen logiikan yleistyksessä kielletään fregeläinen otaksuma. Lauseen referenssiä kutsutaan vain yleisesti *tilanteeksi*. Ei pidä kuitenkaan kuvitella, että fregeläisen logiikan yleistyksessä ei olisi tosia lauseita. Pitää vain niellä se, että kahdella lauseella, joilla on samat totuusarvot, voi olla eri referenssit. Sanotaankin, että fregeläisen logiikan yleistys on loogisesti kaksiarvoinen mutta ontologisesti ei. Mielestäni hyvä analogia hahmottamaan kokonaiskuvaa on siirtyminen metrisistä avaruuksista topologisiin avaruuksiin. Topologinen avaruus yleistää metrisen avaruuden käsitettä ja samankaltaisella tavalla fregeläisen logiikan yleistys yleistää fregeläistä logiikkaa.

Puolalainen Roman Suszko (1919-1979) on fregeläisen logiikan yleistyksen isä. Fregeläisen logiikan yleistys sai alkunsa, kun Suszko kiinnostui Ludwig Wittgensteinin (1889-1951) pääteoksesta *Tractatus Logico-Philosophicus.*[9] Kuten varsin hyvin tiedetään, Wittgenstein otti hyvin paljon vaikutteita Fregeltä, mikä näkyy useina Fregen näkemysten kommentointeina Tractatuksessa. Suszko näkeekin Tractatuksen nimen omaan ei-fregeläisenä teoriana, ja hän kutsuu Wittgensteinin teoriaa jopa antifregeläiseksi varhaisessa julkaisussaan *Non-Fregean Logic and Theories.*[11] Suszko päätyy formalisoimaan Wittgensteinin ontologista teoriaa kirjoituksessa *Ontology in the Tractatus of L. Wittgenstein.*[10] Tuloksena on fregeläisen logiikan yleistys.† Puolalaisen nimen Logika niefregowska suora käännös on ei-fregeläinen logiikka, mutta suomennokseksi on tässä opinnäytteessä valittu jo monesti mainittu fregeläisen logiikan yleistys.

Suszko päätyy myöhemmissä töissään keskittymään SCI-nimiseen‡ formalisointiin, johon otetaan mukaan klassisen propositiologiikan aksioomat, modus ponens -päättelysääntö, uusi konnektiivi $\equiv$ ja joitakin uutta konnektiivia koskevia aksioomia. Kun klassisessa propositiologiikassa ekvivalenssi $\leftrightarrow$ riitti ilmaisemaan lauseiden referenssien samuuden, näin ei ole enää SCI:ssä. Uuden konnektiivin kohdalla sanotaan, että lause $\varphi \equiv \psi$ on tosi jos ja vain jos lauseen φ referenssi on sama kuin lauseen ψ referenssi. Tässä pro gradussa keskitytään SCI:n esittelyyn ja tuloksiin, jotka koskevat SCI:n laajennusten niin kutsuttuja yhdenmukaisia§ malleja, jotka määritellään myöhemmin.

†Lähteessä [8] on melko kattava koonti Suszkon julkaisuhistoriasta.

‡SCI eli Sentential Calculus with Identity.

§Engl. adequate model.

2. Merkinnöistä ja käsitteistä

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

- Merkintä $f : L \mapsto A$ tarkoittaa, että f on kuvaus joukolta L joukolle A, koska symbolille $\rightarrow$ on muuta käyttöä.

- $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(c_0, c_1, c_2, ...) \mid c_0, c_1, c_2, ... \in \{0,1\}\}$
$= \{f \mid f \text{ on kuvaus } \mathbb{N} \mapsto \{0,1\}\}$.

- $\Phi \setminus \Psi = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi \notin \Psi\}$.

- $\#\Phi$ tarkoittaa joukon Φ alkioiden lukumäärää. Jos Φ ei ole äärellinen, merkitään $\#\Phi = \infty$.

- *Perhe* tarkoittaa joukkoa, jonka alkiot ovat joukkoja.

- Jos Γ on perhe, niin joukkoon $\bigcup \Gamma$ kuuluvat ne ja vain ne alkiot a, joille $a \in A$ jollakin $A \in \Gamma$.

- Merkintä $F \subset A$ tarkoittaa, että joukko F on joukon A aito tai epäaito osajoukko.

- Olkoon $\leq$ joukon A kaksipaikkainen relaatio. Paria $\langle A, \leq \rangle$ kutsutaan *osittain järjestetyksi joukoksi.* jos ehdot 1,2 ja 3 ovat voimassa kaikilla $a, b, c \in A$:
(1) $a \leq a$.
(2) Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$.
(3) Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$.
(4) Joko $a \leq b$ tai $b \leq a$.
Jos lisäksi ehto 4 on voimassa, paria $\langle A, \leq \rangle$ kutsutaan *täysin järjestetyksi joukoksi.*

- Alkiota $a \in A$ kutsutaan järjestetyn joukon $\langle A, \leq \rangle$ *maksimaaliseksi alkioksi*, jos ei ole olemassa alkiota $b \in A$, jolle $a < b$.

- Järjestetyn joukon $\langle A, \leq \rangle$ alkiota a kutsutaan joukon $B \subset A$ ylärajaksi, jos $b \leq a$ kaikilla $b \in B$. Jos pienempää joukon B ylärajaa ei ole, merkitään $\sup B = a$.

- Kaunokirjaimilla viitataan algebroihin tai malleihin. Esimerkiksi $\mathcal{A}$ on algebra, jonka perusjoukkona on A. Kaunokirjaimella $\mathcal{M}$ viitataan malliin.

- Jos f on kuvaus $f : L \mapsto A$ ja g kuvaus $g : L_0 \mapsto A$, jolle $L_0 \subset L$ ja $g(\varphi) = f(\varphi)$ kaikilla $\varphi \in L_0$, niin kuvausta g kutsutaan kuvauksen f rajoittumaksi.

- Joukon A relaatiota $\approx \subset A \times A$ kutsutaan ekvivalenssirelaatioksi, jos se on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen. Jokaista $a \in A$ kohti määritellään ekvivalenssiluokka $[a] = \{b \in A \mid a \approx b\}$. Joukko $A/\approx$ on kaikkien joukon A ekvivalenssiluokkien joukko.

3. Kielen syntaksi ja semantiikka

Peruskäsitteistöä

3.1. Määritelmä. Olkoon I indeksijoukko ja $p(L) = \{p_i \mid i \in I\}$. *SCI-lauseiden joukko* L määritellään seuraavasti:

- Joukon $p(L)$ alkiot ovat SCI-lauseita.
- Jos φ on SCI-lause, niin $\neg\varphi$ on SCI-lause.
- Jos φ ja ψ ovat SCI-lauseita, niin $(\varphi \to \psi)$ on SCI-lause.
- Jos φ ja ψ ovat SCI-lauseita, niin $(\varphi \equiv \psi)$ on SCI-lause.

Uloimmat sulut jätetään usein kirjoittamatta tekstin luettavuuden parantamiseksi. SCI-lauseiden sijasta puhutaan monesti vain lauseista.

SCI-lauseet muodostuvat siis joukon $p(L)$ muuttujista. Suszkon niin kutsutuissa W-kielissä[†] muuttujat jakautuvat kahteen: propositionaalisiin ja ei-propositionaalisiin. Joukon $p(L)$ alkiot ovat propositionaalisia muuttujia, joiden – ja joista muodostuvien lauseiden – referenssit ovat tilanteita. Yleensä symboleilla x, y, z viitataan ei-propositionaalisiin muuttujiin, joiden referenssit ovat olioita. Kvanttorit voivat sitoa kumpiakin muuttujia, minkä takia W-kielien teoriasta tulee melko työläslukuinen. Jatkossa käsitellään vain SCI:tä, joten ei-propositionaaliset muuttujat ja kvanttorit voi unohtaa.

3.2. Määritelmä. *SCI-algebra* $\mathcal{A}$ on nelikko $\langle A, \tilde{\neg}^{\mathcal{A}}, \tilde{\to}^{\mathcal{A}}, \tilde{\equiv}^{\mathcal{A}} \rangle$, jossa A on joukko ja $\tilde{\neg}^{\mathcal{A}}, \tilde{\to}^{\mathcal{A}}$ sekä $\tilde{\equiv}^{\mathcal{A}}$ ovat kuvauksia

$$\begin{aligned} \tilde{\neg}^{\mathcal{A}} &: A \mapsto A, \\ \tilde{\to}^{\mathcal{A}} &: A \times A \mapsto A, \\ \tilde{\equiv}^{\mathcal{A}} &: A \times A \mapsto A. \end{aligned}$$

3.3. Määritelmä. *SCI-kieli* $\mathcal{L}$ on SCI-algebra $\langle L, \tilde{\neg}^{\mathcal{L}}, \tilde{\to}^{\mathcal{L}}, \tilde{\equiv}^{\mathcal{L}} \rangle$, jossa

$$\begin{aligned} \tilde{\neg}^{\mathcal{L}}(\varphi) &= \neg\varphi, \\ \tilde{\to}^{\mathcal{L}}(\varphi, \psi) &= \varphi \to \psi, \\ \tilde{\equiv}^{\mathcal{L}}(\varphi, \psi) &= \varphi \equiv \psi \end{aligned}$$

kaikilla SCI-lauseilla φ, ψ.

[†]Kyseessä on Suszkon viittaus Wittgensteiniin.

SCI-algebran kuvausten yläindeksi jätetään usein kirjoittamatta tekstin luettavuuden parantamiseksi. Esimerkiksi symbolin $\tilde{\rightarrow}^{\mathcal{A}}$ sijasta kirjoitetaan $\tilde{\rightarrow}$, jos on selvää, mikä algebra on kyseessä. Jatkossa algebran kuvausten kohdalla käytetään samanlaista merkintätapaa kuin SCI-lauseissa. Esimerkiksi kirjoitetaan $a \tilde{\rightarrow} b$ sen sijaan, että kirjoitettaisiin $\tilde{\rightarrow}(a, b)$.

3.4. Määritelmä. Olkoot $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$ SCI-algebroja. Kuvaus $h : A_1 \mapsto A_2$ on *homomorfismi* algebralta $\mathcal{A}_1$ algebralle $\mathcal{A}_2$, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $a, b \in A_1$:

$$h(\tilde{\neg}^1 a) = \tilde{\neg}^2 h(a), \tag{1}$$

$$h(a \tilde{\rightarrow}^1 b) = h(a) \tilde{\rightarrow}^2 h(b), \tag{2}$$

$$h(a \tilde{\equiv}^1 b) = h(a) \tilde{\equiv}^2 h(b). \tag{3}$$

Homomorfismia $h : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$ kutsutaan *sijoitukseksi*.

3.5. Huomautus. Olkoon $\mathcal{A}$ SCI-algebra ja $f : p(L) \mapsto A$ kuvaus. Tällöin on olemassa homomorfismi $h : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{A}$, jolle pätee: $h(\varphi) = f(\varphi)$, kun $\varphi \in p(L)$.

3.6. Määritelmä. Loput konnektiivit määritellään lyhennyksinä:

- $\varphi \vee \psi$ on SCI-lauseen $\neg\varphi \rightarrow \psi$ lyhennys.
- $\varphi \wedge \psi$ on SCI-lauseen $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ lyhennys.
- $\varphi \leftrightarrow \psi$ on SCI-lauseen $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ lyhennys.

3.7. Määritelmä. Olkoot φ, ψ ja γ SCI-lauseita. Seuraavat SCI-lauseet ovat *totuusfunktionaalisia aksioomia*:

(A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$,

(A2) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$,

(A3) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma))$.

Olkoot φ, ψ, γ ja δ SCI-lauseita. Seuraavat SCI-lauseet ovat *identiteettiaksioomia*:

(I1) $\varphi \equiv \varphi$,

(I2) $(\varphi \equiv \psi) \rightarrow (\neg\varphi \equiv \neg\psi)$,

(I3) $(\varphi \equiv \psi) \rightarrow ((\gamma \equiv \delta) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \gamma) \equiv (\psi \rightarrow \delta)))$,

(I4) $(\varphi \equiv \psi) \rightarrow ((\gamma \equiv \delta) \rightarrow ((\varphi \equiv \gamma) \equiv (\psi \equiv \delta)))$,

(I5) $(\varphi \equiv \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

Kun puhutaan yleisesti *aksioomasta*, tarkoitetaan joko totuusfunktionaalista aksioomaa tai identiteettiaksioomaa.

Aksioomia kannattaa tuijottaa sen verran, että huomaa aksioomien A1-A3 olevan sellaiset, jotka tuottavat propositionaalilogiikassa kaikki tautologiat. Identiteettiaksioomat puolestaan sanovat, että SCI on ekstensionaalinen. Toisin sanoen Fregen huomautus 1.1 tulee formalisoiduksi.

3.8. Määritelmä. *SCI-malli* $\mathcal{M}$ on pari $\langle \mathcal{A}, F \rangle$, jossa $\mathcal{A}$ on SCI-algebra ja F on sellainen joukon A osajoukko, joka toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $a, b \in A$:

(1) $\tilde{\neg}\, a \in F$, jos ja vain jos $a \notin F$,

(2) $a \tilde{\to} b \in F$, jos ja vain jos $a \notin F$ tai $b \in F$,

(3) $a \tilde{\equiv} b \in F$, jos ja vain jos $a = b$.

Homomorfismia $h : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{A}$ kutsutaan $\mathcal{M}$-*tulkinnaksi.*

Ei ole yhdentekevää, otetaanko konnektiivit $\vee, \wedge$ ja $\leftrightarrow$ mukaan määritelmään 3.1 vai määritelläänkö ne lyhennyksinä. Jos käytetään lyhennyksiä, lause $(\neg\varphi \to \psi) \equiv (\varphi \vee \psi)$ on selvästikin aksiooma (I1). Muussa tapauksessa näin ei välttämättä ole.

3.9. Määritelmä. Olkoon Φ joukko SCI-lauseita. Määritellään *joukosta Φ todistuvat lauseet* seuraavasti:

(1) Jokainen Φ:n alkio on todistuva joukosta Φ.
(2) Jokainen totuusfunktionaalinen aksiooma on todistuva joukosta Φ.
(3) Jokainen identiteettiaksiooma on todistuva joukosta Φ.
(4) Jos SCI-lauseet φ ja $(\varphi \to \psi)$ ovat todistuvia joukosta Φ, niin ψ on todistuva joukosta Φ.

Edellisen määritelmän kohtia (1)-(4) kutsutaan myös päättelysäännöiksi. Kun halutaan ilmaista, että todistuksessa on käytetty viimeistä päättelysääntöä, käytetään historiallisista syistä erittäin väljästi kaikenlaisia ilmaisuja, jotka sisältävät sanat modus ja ponens. Esimerkkejä näistä ovat

- modus ponensin nojalla,
- modus ponensista seuraa,
- saatu modus ponensilla.

Seurauskuvaukset

3.10. Määritelmä. Kuvaus $C : \mathcal{P}(L) \mapsto \mathcal{P}(L)$ on *seurauskuvaus* algebrassa $\mathcal{L}$, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $\Phi, \Psi \subset L$:

C1: $\Phi \subset C(\Phi)$.
C2: Jos $\Phi \subset \Psi$, niin $C(\Phi) \subset C(\Psi)$.
C3: $C(C(\Phi)) = C(\Phi)$.

3.11. Määritelmä. Olkoon $\Phi \subset L$. *Syntaktinen seurauskuvaus* $\vdash_\Phi : \mathcal{P}(L) \mapsto \mathcal{P}(L)$ on kuvaus, jolle pätee

$$\vdash_\Phi (\Psi) = \{\varphi \in L \mid \varphi \ \text{ on todistuva joukosta } \ \Psi \cup \Phi\},$$

kun $\Psi \subset L$.

Tapauksessa $\vdash_\emptyset$ kirjoitetaan $\vdash$.

3.12. Huomautus. Olkoon $\Phi \subset L$. Kuvaus $\vdash_\Phi$ on seurauskuvaus.

Todistus. Olkoon $\Psi \subset \Omega \subset L$.

C1: $\Psi \subset \vdash_\Phi (\Psi)$, koska kaikki joukon Ψ alkiot ovat todistuvia joukosta $\Psi \cup \Phi$.

C2: Olkoon $\varphi \in \vdash_\Phi (\Psi)$. Käydään läpi kolme tapausta:
- Jos $\varphi \in \Psi \cup \Phi$, niin $\varphi \in \Omega \cup \Phi$, joten $\varphi \in \vdash_\Phi (\Omega)$.
- Jos φ on aksiooma, niin $\varphi \in \vdash_\Phi (\Omega)$.
- Induktio-oletus: väite pätee joukosta $\Psi \cup \Phi$ todistuville lauseille ψ ja $\psi \to \varphi$. Lauseet ψ ja $\psi \to \varphi$ ovat siis todistuvia joukosta $\Omega \cup \Phi$. Tällöin φ on todistuva joukosta $\Omega \cup \Phi$. Siis $\varphi \in \vdash_\Phi (\Omega)$.

C3: Selvästi $\vdash_\Phi (\Psi) \subset \vdash_\Phi (\vdash_\Phi (\Psi))$. Olkoon $\varphi \in \vdash_\Phi (\vdash_\Phi (\Psi))$.
- Jos $\varphi \in \vdash_\Phi (\Psi)$ tai jos φ on aksiooma, niin selvästi pätee $\varphi \in \vdash_\Phi (\Psi)$.
- Induktio-oletus: väite pätee joukosta $\vdash_\Phi (\Psi)$ todistuville lauseille ψ ja $\psi \to \varphi$. Lauseet ψ ja $\psi \to \varphi$ ovat siis todistuvia joukosta $\Psi \cup \Phi$. Tällöin φ on todistuva joukosta $\Psi \cup \Phi$. Siispä $\varphi \in \vdash_\Phi (\Psi)$.

$\square$

3.13. Määritelmä. Jokaista mallia $\mathcal{M}$ kohti määritellään *semanttinen seurauskuvaus* $\models_{\mathcal{M}}$ seuraavasti:

$$\models_{\mathcal{M}} (\Phi) = \left\{ \varphi \in L \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Kaikilla } \mathcal{M}\text{-tulkinnoilla } h \text{ pätee:} \\ \text{jos } h(\Phi) \subset F, \text{ niin } h(\varphi) \in F. \end{array} \right\}.$$

Lause $\varphi \in L$ on *tosi mallissa* $\mathcal{M}$, jos $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset)$. Merkitään mallissa $\mathcal{M}$ tosien lauseiden joukkoa symbolilla $TR(\mathcal{M})$.

3.14. Huomautus. Olkoon $\mathcal{M}$ malli. Kuvaus $\models_{\mathcal{M}}$ on seurauskuvaus.

Todistus. Olkoon $\Phi \subset \Psi \subset L$.

C1: Selvä tapaus.
C2: Jos $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\Phi)$, niin $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\Psi)$, koska $h(\Phi) \subset h(\Psi)$.
C3: Olkoon $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\Phi)$. Kohdan C1 nojalla $h(\Phi) \subset h(\models_{\mathcal{M}} (\Phi))$, joten $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\models_{\mathcal{M}} (\Phi))$. Olkoon sitten $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\models_{\mathcal{M}} (\Phi))$. Olkoon h sellainen homomorfismi, että $h(\Phi) \subset F$. Jos pätee $\psi \in \models_{\mathcal{M}} (\Phi)$, niin $h(\psi) \in F$, koska $h(\Phi) \in F$. Siispä $h(\models_{\mathcal{M}} (\Phi)) \subset F$, jolloin $h(\varphi) \in F$. Näin ollen $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\Phi)$.

□

Jatkossa ollaan kiinnostuneita ainoastaan syntaktisista ja semanttisista seurauskuvauksista. Seuraavassa kappaleessa todistetaan useita tuloksia, jotka ovat perustyökaluja kappaletta 5 varten, jossa käsitellään yhdenmukaisia malleja.

Seuraavan kappaleen yhtenä pyrkimyksenä on todistaa täydellisyyslause[†], joka todistetaan Lindenbaumin lauseen avulla. On kuitenkin huomattava, että kappaleen 3 alussa valittu indeksijoukko I saattaa olla ylinumeroituva, mikä johtaa siihen, että Lindenbaumin lemman todistuksessa tarvitaan Zornin lemmaa. Todistuksista tulee hieman yksinkertaisempia, jos olettaa joukon I olevan numeroituva.[‡] Kappaleessa 5 tarvittavien ultrasuodattimien olemassaolo todistuu kuitenkin hyvin kätevästi Zornin lemman avulla. Lisäksi olisi filosofisesti arveluttavaa tehdä oletuksia joukon I koosta.

[†]Karkea versio todistuksesta löytyy lähteestä [4].
[‡]Numeroituvassa tapauksessa monet seuraavan kappaleen todistuksista etenevät melko samalla tavalla kuin lähteessä [6].

4. Täydellisyyslause

4.1. Määritelmä. Joukko $\Phi \subset L$ on

- *teoria*, jos $\vdash(\Phi) = \Phi$;
- *ristiriidaton*, jos $\vdash(\Phi) \neq L$;
- *täydellinen*, jos se on ristiriidaton ja kaikilla $\Psi \subset L$ pätee: jos $\Phi \subset \Psi$ ja $\vdash(\Psi) \neq L$, niin $\Phi = \Psi$;
- *invariantti*, jos $h(\Phi) \subset \Phi$ kaikilla sijoituksilla h.

4.2. Lemma. Olkoon $\Phi \subset L$. Kaikilla SCI-lauseilla φ ja ψ pätee:

$$\varphi \to \psi \in \vdash_\Phi (\Psi) \text{ jos ja vain jos } \psi \in \vdash_\Phi (\Psi \cup \{\varphi\}),$$

kun $\Psi \subset L$.

Todistus.

Oletetaan, että $\varphi \to \psi \in \vdash_\Phi (\Psi)$.
Nyt pätee

$$\begin{aligned} \varphi \to \psi &\in \vdash_\Phi (\Psi \cup \{\varphi\}) \text{ ja} \\ \varphi &\in \vdash_\Phi (\Psi \cup \{\varphi\}), \end{aligned}$$

joten

$$\psi \in \vdash_\Phi (\Psi \cup \{\varphi\}).$$

Oletetaan sitten, että $\psi \in \vdash_\Phi (\Psi \cup \{\varphi\})$. Käydään läpi kolme tapausta:

(1) $\psi \in \Psi \cup \Phi \cup \{\varphi\}$: Nyt

$$\begin{aligned} \psi &\in \vdash_\Phi (\Psi \cup \{\varphi\}) \text{ ja} \\ \psi \to (\varphi \to \psi) &\in \vdash_\Phi (\Psi \cup \{\varphi\}), \text{ joten} \\ \varphi \to \psi &\in \vdash_\Phi (\Psi \cup \{\varphi\}). \end{aligned}$$

(2) ψ on aksiooma: tehdään samankaltainen päättely kuin kohdassa (1).

(3) ψ on saatu modus ponensilla lauseista γ ja $\gamma \to \psi$, joille väite jo pätee: Tällöin $\varphi \to \gamma \in \vdash_\Phi (\Psi)$ ja $\varphi \to (\gamma \to \psi) \in \vdash_\Phi (\Psi)$. Aksioomasta A3 ja kahdesta modus ponensista seuraa $\varphi \to \psi \in \vdash_\Phi (\Psi)$.

$\square$

4.3. Huomautus. Lemmasta 4.2 seuraa heti kättelyssä, että $\varphi \to \varphi \in \vdash (\Phi)$, kun φ on jokin lause ja Φ jokin lausejoukko.

4.4. Lemma. Olkoon $\varphi, \psi \in L$ ja $\Phi \subset L$. Tällöin

$$(\neg\varphi \to \neg(\psi \to \psi)) \to \varphi \in \vdash (\Phi).$$

Todistus. Riittää osoittaa, että $\varphi \in \vdash (\Phi \cup \{\neg\varphi \to \neg(\psi \to \psi)\})$. Aksiooman (A2) ja modus ponensin avulla saadaan

$$(\psi \to \psi) \to \varphi \in \vdash (\{\neg\varphi \to \neg(\psi \to \psi\})).$$

Edellisen huomautuksen ja modus ponensin nojalla väite on todistettu. $\square$

4.5. Lemma. Olkoon $\varphi \in L$ ja $\Phi \subset L$. Jos $\varphi \notin \vdash (\Phi)$, niin $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ on ristiriidaton.

Todistus. Oletetaan, että $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ on ristiriitainen. Tällöin pätee $\neg(\varphi \to \varphi) \in \vdash (\Phi \cup \{\neg\varphi\})$. Lemman 4.2 nojalla $\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi) \in \vdash (\Phi)$. Lemman 4.4 nojalla $\varphi \in \vdash (\Phi)$. $\square$

4.6. Lemma. Olkoon $\varphi \in L$ ja $\Phi \subset L$. Jos

$$\begin{aligned} \varphi &\in \vdash (\Phi) \text{ ja} \\ \neg\varphi &\in \vdash (\Phi), \end{aligned}$$

niin Φ on ristiriitainen.

Todistus. Olkoon ψ jokin lause. Osoitetaan, että $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ on todistuva joukosta Φ. Merkitään selvyyden vuoksi

$$\begin{aligned} \gamma &= (\neg\psi \to \neg\varphi), \\ \delta &= (\varphi \to \psi). \end{aligned}$$

Aksioomien

$$\begin{aligned} &(\mathrm{A2})\ \gamma \to \delta \text{ ja} \\ &(\mathrm{A1})\ (\gamma \to \delta) \to (\neg\varphi \to (\gamma \to \delta)) \end{aligned}$$

ja modus ponensin nojalla $\neg\varphi \to (\gamma \to \delta)$ on todistuva joukosta Φ. Edelleen aksiooman

$$(\mathrm{A3})\ (\neg\varphi \to (\gamma \to \delta)) \to ((\neg\varphi \to \gamma) \to (\neg\varphi \to \delta))$$

ja modus ponensin nojalla $(\neg\varphi \to \gamma) \to (\neg\varphi \to \delta)$ on todistuva joukosta Φ. Aksiooman

$$(\mathrm{A1})\ \neg\varphi \to \gamma$$

ja modus ponensin nojalla $\neg\varphi \to \delta$ on todistuva joukosta Φ. Nyt pätee $\neg\varphi \to \delta = \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$. Kahden modus ponensin nojalla ψ on todistuva joukosta Φ. Siis Φ on ristiriitainen. $\square$

4.7. Lemma. Olkoon Φ täydellinen. Jos φ on mikä tahansa lause, niin joko $\varphi \in \Phi$ tai $\neg\varphi \in \Phi$.

Todistus. Osoitetaan aluksi, että Φ on teoria. Olkoon $\psi \notin \Phi$. Tällöin $\Phi \cup \{\psi\}$ on ristiriitainen, jolloin $\neg\psi \in\, \vdash (\Phi \cup \{\psi\})$. Lemman 4.2 nojalla $\psi \to \neg\psi \in\, \vdash (\Phi)$. On siis oltava $\psi \notin\, \vdash (\Phi)$, koska muutoin Φ olisi ristiriitainen.

Jos nyt $\varphi \notin \Phi$, niin $\varphi \notin\, \vdash (\Phi)$. Lemman 4.5 nojalla $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ on ristiriidaton, joten $\neg\varphi \in \Phi$. □

4.8. Lemma. Jos $\Phi \subset L$ on ristiriitainen joukko, niin on olemassa äärellinen $\Psi \subset \Phi$, joka on ristiriitainen.

Todistus. Oletuksen mukaan $\neg(\varphi \to \varphi) \in\, \vdash (\Phi)$, ja tämän lauseen todistus on äärellinen. Olkoon Ψ niiden joukon Φ lauseiden joukko, joita on käytetty kyseisessä todistuksessa. Olkoon ψ mikä tahansa lause. Nyt

$$\begin{aligned} \neg(\varphi \to \varphi) &\in\, \vdash (\Psi) \text{ ja aksiooman (A1) nojalla} \\ \neg(\varphi \to \varphi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) &\in\, \vdash (\Psi), \text{ joten} \\ \neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi) &\in\, \vdash (\Psi). \end{aligned}$$

Aksiooman (A2) nojalla $(\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \psi) \in\, \vdash (\Psi)$, joten $(\varphi \to \varphi) \to \psi \in\, \vdash (\Psi)$ ja edelleen $\psi \in\, \vdash (\Psi)$. Näin ollen Ψ on ristiriitainen. □

4.9. Lemma. Olkoon J sellainen indeksijoukko, että Φ_j on ristiriidaton kaikilla $j \in J$. Oletetaan, että $\Phi_j \subset \Phi_k$ tai $\Phi_k \subset \Phi_j$ kaikilla $j, k \in J$. Tällöin $\bigcup_{j \in J} \Phi_j$ on ristiriidaton.

Todistus. Olkoon $\Psi \subset \bigcup_{j \in J} \Phi_j$ äärellinen. Tällöin on olemassa $j \in J$, jolla $\Psi \subset \Phi_j$. Koska Φ_j on ristiriidaton, myös Ψ on ristiriidaton. Siis $\bigcup_{j \in J} \Phi_j$ on ristiriidaton. □

4.10. Valinta-aksiooma. Olkoon Γ perhe epätyhjiä joukkoja. Tällöin on olemassa kuvaus $f : \Gamma \mapsto \bigcup \Gamma$, jolle $f(\Phi) \in \Phi$ kaikilla $\Phi \in \Gamma$.

Valinta-aksiooma oletetaan todeksi.

4.11. Määritelmä. Olkoon $\langle \Gamma, \leq \rangle$ osittain järjestetty joukko. Joukkoa $K \subset \Gamma$ kutsutaan joukon Γ *ketjuksi*, jos $\langle K, \leq \rangle$ on täysin järjestetty joukko.

4.12. Zornin lemma. Oletetaan, että jokaisella osittain järjestetyn epätyhjän joukon $\langle \Gamma, \leq \rangle$ ketjulla K on pienin yläraja $\sup K$ joukossa Γ. Tällöin joukossa Γ on ainakin yksi maksimaalinen alkio.

Todistus. Tehdään vastaoletus: joukossa Γ ei ole maksimaalista alkiota. Merkitään jokaisella $\Phi \in \Gamma$

$$S(\Phi) = \{\Psi \in \Gamma \mid \Psi > \Phi\}.$$

Vastaoletuksen nojalla $\{S(\Phi) \mid \Phi \in \Gamma\}$ on perhe epätyhjiä joukkoja, jolloin valinta-aksiooman nojalla on olemassa kuvaus $f : \Gamma \mapsto \Gamma$, jolle $f(\Phi) > \Phi$ kaikilla $\Phi \in \Gamma$.

Kiinnitetään koko todistuksen ajaksi jokin joukon Γ alkio Φ_0. Joukkoa $Z \subset \Gamma$ kutsutaan *Zornin joukoksi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $\Phi_0 \in Z$.
(2) Jos $\Phi \in Z$, niin $f(\Phi) \in Z$.
(3) Jos K on joukon Γ ketju ja $\emptyset \neq K \subset Z$, niin $\sup K \in Z$.

Osoitetaan seuraavaksi, että kaikkien Zornin joukkojen leikkaus Z_0 on Zornin joukko.

(1) Selvä tapaus.
(2) Olkoon $\Phi \in Z_0$. Nyt $\Phi \in Z$ kaikilla Zornin joukoilla Z, joille ehto (2) jo pätee. Siispä $f(\Phi) \in Z$ kaikilla Zornin joukoilla Z, joten $f(\Phi) \in Z_0$.
(3) Olkoon seuraavaksi $\emptyset \neq K \subset Z_0$, missä K on ketju. Nyt $K \subset Z$ ja $\sup K \in Z$ kaikilla Zornin joukoilla Z. Siispä $\sup K \in Z_0$.

Olkoon Δ niiden alkioiden $\delta \in Z_0$ joukko, joille kaikilla $\Phi \in Z_0$ pätee:

$$\text{Jos } \ \Phi \in Z_0 \text{ ja } \ \Phi < \delta, \text{ niin } \ f(\Phi) \leq \delta.$$

Merkitään lisäksi jokaisella $\delta \in \Delta$

$$B(\delta) = \{\Phi \in Z_0 \mid \Phi \leq \delta \text{ tai } \ \Phi \geq f(\delta)\}.$$

Zornin lemman todistuksen alkuvalmistelut on nyt tehty. Osoitetaan seuraavaksi kolme aputulosta:

(i) $B(\delta) = Z_0$ kaikilla $\delta \in \Delta$.
(ii) $\Delta = Z_0$.
(iii) Z_0 on ketju.

Todistus etenee kutakuinkin siten, että aputuloksen (i) avulla osoitetaan (ii). Tämän jälkeen aputulosten (i) ja (ii) avulla osoitetaan (iii), josta seuraa ristiriita, mikä todistaa Zornin lemman.

(i) Riittää osoittaa, että $B(\delta)$ on Zornin joukko.

(1) Huomataan, että $\{\Phi \in \Gamma \mid \Phi \geq \Phi_0\}$ on Zornin joukko. Siispä $\Phi_0 \leq \delta$.
(2) Olkoon $\Phi \in B(\delta)$. Käydään läpi kolme tapausta:
  - $\Phi < \delta$. Joukon Δ määritelmästä seuraa, että $f(\Phi) \leq \delta$. Siis $f(\Phi) \in B(\delta)$.
  - $\Phi = \delta$. Tällöin $f(\Phi) = f(\delta)$. Siis $f(\Phi) \in B(\delta)$.
  - $\Phi \geq f(\delta)$. Nyt $f(\Phi) > \Phi \geq f(\delta)$. Siis $f(\Phi) \in B(\delta)$.
(3) Olkoon K ketju ja $\emptyset \neq K \subset B(\delta)$. Käydään läpi kaksi tapausta:
  - Alkio δ on ketjun K yläraja. Tällöin $\sup K \leq \delta$. Siis $\sup K \in B(\delta)$.
  - Alkio δ ei ole ketjun K yläraja. Tällöin on olemassa $k \in K$, jolle $k > \delta$. On siis oltava $k \geq f(\delta)$ ja edelleen $\sup K \geq f(\delta)$. Siis $\sup K \in B(\delta)$. $\boxtimes$

(ii) Riittää osoittaa, että Δ on Zornin joukko.

(1) Muistetaan taas, että $\{\Phi \in \Gamma \mid \Phi \geq \Phi_0\}$ on Zornin joukko. Siispä $\Phi \geq \Phi_0$ kaikilla $\Phi \in Z_0$, joten $\Phi_0 \in \Delta$.
(2) Olkoon $\delta \in \Delta$. Oletetaan, että $\Phi \in Z_0$ ja $\Phi < f(\delta)$. Aputuloksen (i) nojalla $\Phi \in B(\delta)$, jolloin on oltava $\Phi \leq \delta$. Jos $\Phi = \delta$, niin selvästi $f(\delta) \in \Delta$. Jos taas $\Phi < \delta$, niin joukon Δ ja funktion f määritelmien nojalla $f(\Phi) \leq \delta < f(\delta)$. Siispä $f(\delta) \in \Delta$.
(3) Olkoon K ketju, $\emptyset \neq K \subset \Delta$, $\Phi \in Z_0$ ja $\Phi < \sup K$. On osoitettava, että $f(\Phi) \leq \sup K$. Käydään läpi kaksi tapausta:
  - On olemassa $k \in K$, jolla $\Phi < k$. Nyt joukon Δ määrittelystä seuraa $f(\Phi) \leq k \leq \sup K$.
  - Tällaista alkiota k ei ole. Nyt $\Phi \geq \sup K$, mikä on ristiriidassa oletuksen $\Phi < \sup K$ kanssa. $\boxtimes$

(iii) Olkoon $\Phi, \Psi \in Z_0$. Tällöin aputuloksen (ii) nojalla $\Phi \in \Delta$ ja aputuloksen (i) nojalla $\Psi \in B(\Phi)$. Nyt joko $\Psi \leq \Phi$ tai $\Psi \geq f(\Phi) > \Phi$. Siis Z_0 on ketju. $\boxtimes$

On vielä todettava, että aputuloksesta (iii) seuraa ristiriita. Koska Z_0 on Zornin joukko ja ketju, on oltava $\sup Z_0 \in Z_0$, jolloin myös $f(\sup Z_0) \in Z_0$. Nyt $f(\sup Z_0) \leq \sup Z_0$, vaikka funktion f määritelmän nojalla pätee $f(\sup Z_0) > \sup Z_0$. $\square$

4.13. Lindenbaumin lemma. Olkoon $\Phi \subset L$ ja $\varphi \in L$. Jos $\varphi \notin \vdash (\Phi)$, on olemassa täydellinen $\Psi \subset L$, jolle $\Phi \subset \Psi$ ja $\varphi \notin \Psi$.

Todistus. Olkoon

$$\Gamma = \{\Psi_0 \subset L \mid \Phi \subset \Psi_0,\ \vdash (\Psi_0) \neq L, \neg\varphi \in \Psi_0\}.$$

Pari $\langle \Gamma, \subset \rangle$ on osittain järjestetty epätyhjä joukko. Olkoon Γ' joukon Γ ketju. Lemman 4.9 nojalla joukolla Γ' on yläraja joukossa Γ. Tämä yläraja on myös selvästi pienin yläraja. Zornin lemman nojalla joukossa Γ on maksimaalinen alkio Ψ. Selvästikin Ψ on täydellinen. Lemman 4.7 nojalla $\varphi \notin \Psi$. □

4.14. Lemma. Olkoon $\varphi, \psi \in \vdash_\Phi (\Psi)$. Tällöin $\varphi \wedge \psi \in \vdash_\Phi (\Psi)$.

Todistus. Tehdään vastaoletus: $\neg(\varphi \to \neg\psi) \notin \vdash_\Phi (\Psi)$. Lindenbaumin lemman nojalla on olemassa täydellinen Ψ', jolle $\Psi \subset \Psi'$ ja $\varphi \to \neg\psi \in \Psi'$. Oletuksista seuraa modus ponensia käyttämällä $\psi, \neg\psi \in \Psi'$. □

4.15. Täydellisyyslause. Olkoon $\Phi \subset L$ ja $\varphi \in L$.

$$\varphi \in \vdash (\Phi) \text{ jos ja vain jos } \varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\Phi) \text{ kaikilla malleilla } \mathcal{M}.$$

Todistus. Olkoon $\mathcal{M}$ malli, h $\mathcal{M}$-tulkinta ja $\varphi \in \vdash (\Phi)$. Osoitetaan induktiolla lauseen φ rakenteen suhteen, että $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\Phi)$.

- Tapaus $\varphi \in \Phi$ on selvä.

- Osoitetaan, että aksioomat ovat tosia kaikissa malleissa. Katso seuraavan sivun koonti.

- Oletetaan, että ψ ja $\psi \to \varphi$ ovat todistuvia joukosta Φ. Induktio-oletuksen mukaan $\psi, \psi \to \varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\Phi)$. Oletetaan, että $h(\Phi) \in F$. Nyt $h(\psi) \tilde{\to} h(\varphi) \in F$ ja $h(\psi) \in F$, joten $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\Phi)$.

(A1)

$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset),$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi) \tilde{\to} ((h(\chi) \tilde{\to} h(\varphi)) \in F,$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi) \notin F \text{ tai } h(\varphi) \in F.$$

(A2)

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi) \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset),$$

jos ja vain jos

$$h(\neg\varphi) \tilde{\to} h(\neg\psi) \notin F \text{ tai } h(\psi) \tilde{\to} h(\varphi) \in, F$$

jos ja vain jos

$$(h(\varphi) \notin F \text{ ja } h(\psi) \in F) \text{ tai } (h(\psi) \notin F \text{ tai } h(\varphi) \in F).$$

(A3)

$$(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma)) \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset),$$

jos ja vain jos

$$(h(\varphi) \tilde{\to} h(\psi \to \gamma)) \tilde{\to} (h(\varphi \to \psi) \tilde{\to} h(\varphi \to \gamma)) \in F,$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi) \notin F \text{ tai } h(\psi) \in F \text{ tai } h(\psi) \notin F \text{ tai } h(\gamma) \in F.$$

(I1)

$$\varphi \equiv \varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset),$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi) \tilde{\equiv} h(\varphi) \in F,$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi) = h(\varphi).$$

(I2)

$$(\varphi \equiv \psi) \to (\neg\varphi \equiv \neg\psi) \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset),$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi) \tilde{\equiv} h(\psi) \notin F \text{ tai } h(\neg\varphi) \tilde{\equiv} h(\neg\psi) \in F,$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi) \neq h(\psi) \text{ tai } h(\varphi) = h(\psi).$$

(I3)

$$(\varphi_0 \equiv \psi_0) \to ((\varphi_1 \equiv \psi_1) \to ((\varphi_0 \to \varphi_1) \equiv (\psi_0 \to \psi_1))) \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset),$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi_0) \tilde{\equiv} h(\psi_0) \notin F \text{ tai } h(\varphi_1 \equiv \psi_1) \tilde{\to} h((\varphi_0 \to \varphi_1) \equiv (\psi_0 \to \psi_1)) \in F,$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi_0) \neq h(\psi_0) \text{ tai } h(\varphi_1) \neq h(\psi_1) \text{ tai } (h(\varphi_0) = h(\psi_0) \text{ ja } h(\varphi_1) = h(\psi_1))$$

(I4)

$$(\varphi_0 \equiv \psi_0) \to ((\varphi_1 \equiv \psi_1) \to ((\varphi_0 \equiv \varphi_1) \equiv (\psi_0 \equiv \psi_1))) \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset),$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi_0) \tilde{\equiv} h(\psi_0) \notin F \text{ tai } h(\varphi_1 \equiv \psi_1) \tilde{\to} h((\varphi_0 \equiv \varphi_1) \equiv (\psi_0 \equiv \psi_1)) \in F,$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi_0) \neq h(\psi_0) \text{ tai } h(\varphi_1) \neq h(\psi_1) \text{ tai } (h(\varphi_0) = h(\psi_0) \text{ ja } h(\varphi_1) = h(\psi_1))$$

(I5)

$$(\varphi \equiv \psi) \to (\varphi \to \psi) \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset),$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi \equiv \psi) \notin F \text{ tai } h(\varphi \to \psi) \in F,$$

jos ja vain jos

$$h(\varphi) \neq h(\psi) \text{ tai } h(\varphi) = h(\psi).$$

Oletetaan seuraavaksi, että $\varphi \notin \vdash(\Phi)$. Lemman 4.5 nojalla $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ on ristiriidaton, jolloin on olemassa täydellinen $\Psi \subset L$, jolle $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \subset \Psi$. Olkoon sitten $\approx$ sellainen relaatio, jolle $\psi \approx \gamma$, jos ja vain jos $(\psi \equiv \gamma) \in \Psi$. Huomataan, että $\approx$ on ekvivalenssirelaatio ja että

$$\mathcal{L}/\approx\, = \langle L/\approx, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv}\rangle$$

on SCI-algebra, jossa

$$\begin{aligned}\tilde{\neg}[\varphi] &= [\neg\varphi],\\ [\varphi] \mathrel{\tilde{\rightarrow}} [\psi] &= [\varphi \rightarrow \psi],\\ [\varphi] \mathrel{\tilde{\equiv}} [\psi] &= [\varphi \equiv \psi].\end{aligned}$$

On nopeasti tarkistettu, että kuvaukset $\tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv}$ ovat hyvin määriteltyjä ja lisäksi pari $\mathcal{M} = \langle \mathcal{L}/\approx, \Psi/\approx\rangle$ on malli.

Jos nyt $h : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/\approx$ on sellainen homomorfismi, jolle $h(\psi) = [\psi]$, niin $h(\Psi) \subset \Psi/\approx$, ja edelleen $h(\Phi) \subset \Psi/\approx$ mutta $h(\varphi) \notin \Psi/\approx$. Siis $\varphi \notin \models_{\mathcal{M}}(\Phi)$. □

4.16. Lemma. Teoria $\Phi \subset L$ on ristiriidaton jos ja vain jos on olemassa malli $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F\rangle$ ja $\mathcal{M}$-tulkinta h, joilla $\Phi \subset h^{-1}(F)$.

Todistus. Oletetaan, että Φ on ristiriidaton. Lindenbaumin lemman nojalla on olemassa täydellinen $\Psi \subset L$, jolle $\Phi \subset \Psi$. Muodostetaan malli $\mathcal{M} = \langle \mathcal{L}/\approx, \Psi/\approx\rangle$ kuten täydellisyyslauseen todistuksessa. Nyt jos h on identtinen kuvaus, niin selvästikin $\Phi \subset h^{-1}(\Psi)$.

Jos h on sellainen $\mathcal{M}$-tulkinta, jolla $\Phi \subset h^{-1}(F)$, niin Φ on ristiriidaton, koska $\neg(\varphi \rightarrow \varphi) \notin h'^{-1}(F)$ kaikilla tulkinnoilla h'. □

4.17. Huomautus. Kaikilla lauseilla φ ja ψ pätee $\varphi \in \vdash(\{\varphi \wedge \psi\})$ ja $\psi \in \vdash(\{\varphi \wedge \psi\})$.

Todistus. Olkoon $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F\rangle$ mielivaltainen malli. Koska kaikilla $h : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{A}$ pätee

$$\begin{gathered}h(\varphi) \notin F \text{ tai } h(\psi) \notin F \text{ tai } h(\varphi) \in F \text{ sekä}\\ h(\varphi) \notin F \text{ tai } h(\psi) \notin F \text{ tai } h(\psi) \in F,\end{gathered}$$

niin lauseet $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$ ja $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \psi$ ovat tosia mallissa $\mathcal{M}$. Täydellisyyslauseen ja lemman 4.2 nojalla

$$\begin{aligned}&\varphi \in \vdash(\{\varphi \wedge \psi\}) \text{ sekä}\\ &\psi \in \vdash(\{\varphi \wedge \psi\}).\end{aligned}$$

□

5. Yhdenmukaiset mallit

5.1. Määritelmä. Syntaktisella seurauskuvauksella $\vdash_\Phi$ on *yhdenmukainen malli*, jos $\vdash_\Phi \,=\, \models_\mathcal{M}$ jollakin mallilla $\mathcal{M}$.

Tässä kappaleessa osoitetaan kolme lausetta†:

Lause I *Seurauskuvauksella $\vdash$ on yhdenmukainen malli $\mathcal{M}_\vdash$.*
Tämä todistuu melko kätevästi summaamalla täydellisten teorioiden malleja yhteen. Huomataan, että näiden mallien summa on haluttu yhdenmukainen malli.

Lause II *Malli $\mathcal{M}_\vdash$ on ylinumeroituva.*
Lauseen todistaminen vaatii melko paljon valmisteluja. Aluksi on osoitettava useita totuusjakaumia koskevia tuloksia. Seuraavaksi osoitetaan, että niin kutsuttujen samaistavien täydellisten teorioiden joukko on ylinumeroituva. Lopuksi huomataan, että jos malli $\mathcal{M}_\vdash$ on numeroituva, niin myös samaistavien täydellisten teorioiden joukko on numeroituva. Näin saadaan haluttu ristiriita.

Lause III *Joukko*

$$\{\ \vdash_\Phi \ \mid \text{on olemassa malli } \mathcal{M}, \text{ jolla } \vdash_\Phi \,=\, \models_\mathcal{M}\}$$

on ylinumeroituva.
Aluksi rakennetaan tarpeeksi - siis ylinumeroituvasti - niin kutsuttuja P-malleja. Ongelmana on, etteivät P-mallit ole aivan niitä joita tarvittaisiin. Ongelma ratkeaa kuitenkin mallien ultrapotenssien avulla.

5.2. Huomautus. Fregeläisen logiikan yleistyksen *laajennukseksi* kutsutaan paria $\langle \mathcal{L}, \vdash_\Phi \rangle$, missä $\Phi \subset L$. Eräs näistä laajennuksista on sellainen, jossa

$$\Phi = \{(\varphi \to \psi) \to (\varphi \equiv \psi) \mid \varphi, \psi \in L\}.$$

Tässä laajennuksessa $\equiv$-konnektiivi ei erotu ekvivalenssista – kyseessä on siis klassinen propositiologiikka. Seurauskuvauksella $\vdash_\Phi$ on äärellinen yhdenmukainen malli. Malliksi riittää nimittäin valita $\mathcal{M} = \langle \{0,1\}, \{1\} \rangle$, missä $\{0,1\}$ on kaksialkioinen Boolen algebra.

†Todistukset perustuvat lähteissä [1], [2] ja [3] esitettyihin todistuksiin.

Lause I

5.3. Huomautus. Seurauskuvauksella $\vdash$ ei ole äärellistä yhdenmukaista mallia.

Todistus. Olkoon $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ malli, $n \in \mathbb{N}$ mielivaltainen ja $\#A = n$. Olkoot $1, ..., n, n+1 \in I$ ja φ lause

$$p_1 \equiv p_2 \vee p_1 \equiv p_3 \vee ... \vee p_2 \equiv p_3 \vee p_2 \equiv p_4 \vee ... \vee p_n \equiv p_{n+1}.$$

Nyt $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset)$, mutta $\varphi \notin \models_{\mathcal{M}'} (\emptyset)$, missä $\mathcal{M}'$ on malli, jonka koko on suurempi kuin n. Lauseesta 4.15 seuraa, että $\varphi \notin \vdash (\emptyset)$. $\square$

5.4. Määritelmä. Olkoon J indeksijoukko, $\mathcal{A}_j = \langle A_j, \neg_j, \rightarrow_j, \equiv_j \rangle$ SCI-algebra ja $\mathcal{M}_j = \langle \mathcal{A}_j, F_j \rangle$ malli jokaisella $j \in J$. Oletetaan lisäksi, että $A_i \cap A_j = \emptyset$, kun $i \neq j$. Olkoon sitten

$$A = \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad F = \bigcup_{j \in J} F_j.$$

Olkoon sitten $1 \in F$, $0 \in A - F$, $a_i \in A_i, a_j \in A_j$. Määritellään operaatiot $\tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv}$ seuraavasti:

$$\tilde{\neg} a_i = \neg_i a_i,$$

$$a_i \tilde{\rightarrow} a_j = \begin{cases} a_i \rightarrow_i a_j & \text{jos } i = j \\ 0 & \text{jos } a_i \in F_i \text{ ja } a_j \notin F_j \\ 1 & \text{muuten,} \end{cases}$$

$$a_i \tilde{\equiv} a_j = \begin{cases} a_i \equiv_i a_j & \text{jos } i = j \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Paria $\langle \mathcal{A}, F \rangle = \mathcal{M}$, missä $\mathcal{A} = \langle A, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv} \rangle$, kutsutaan mallien $\mathcal{M}_j$ *summaksi.*

5.5. Huomautus. Mallien $\mathcal{M}_j$ summa $\mathcal{M}$ on malli.

Todistus. $\mathcal{A}$ on selvästi SCI-algebra. Todetaan, että määritelmän 3.8 ehdot ovat voimassa:

$$(1)\quad \begin{aligned} &\tilde{\neg} a \in F \text{ jos ja vain jos} \\ &\neg_j a \in F_j \text{ jollakin } j \in J \text{ jos ja vain jos} \\ &a \in A_j - F_j \text{ jollakin } j \in J \text{ jos ja vain jos } a \notin F; \end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned} &a \tilde{\rightarrow} b \in F \text{ jos ja vain jos} \\ &a \tilde{\rightarrow} b \in F_i \text{ jollain } i \in J \text{ jos ja vain jos} \\ &(a \in A_i - F_i \text{ tai } b \in F_i \text{ jollain } i \in J) \text{ tai} \\ &\quad (a \in A_i - F_i \text{ tai } b \in F_j \text{ joillakin } i, j \in J, i \neq j) \text{ jos ja vain jos} \\ &a \notin F \text{ tai } b \in F. \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} &a \mathrel{\tilde{\equiv}} b \in F \text{ jos ja vain jos} \\ &a \mathrel{\tilde{\equiv}} b \in F_j \text{ jollakin } j \in J \text{ jos ja vain jos} \\ &a \equiv_j b \in F_j \text{ jollakin } j \in J \text{ jos ja vain jos} \\ &a = b. \end{aligned}$$

□

5.6. Lause I. Seurauskuvauksella $\vdash$ on yhdenmukainen malli.

Todistus. Olkoon $\{\Psi_j \mid j \in J\}$ täydellisten teorioiden joukko. Lemman 4.16 nojalla jokaisella j on olemassa malli $\mathcal{M}_j$ ja $\mathcal{M}_j$-tulkinta h_j, joilla $\Psi_j \subset h_j^{-1}(F_j)$. Oletetaan, että jokaisella $i, j \in J, i \neq j$, pätee $A_i \cap A_j = \emptyset$. Olkoon $\mathcal{M}$ mallien $\mathcal{M}_j$ summa. Osoitetaan, että $\vdash \, = \, \models_{\mathcal{M}}$. Lauseen 4.15 nojalla $\vdash (\Phi) \subset \, \models_{\mathcal{M}} (\Phi)$, kun Φ on mikä tahansa lausejoukko.

Riittää siis osoittaa, että $\models_{\mathcal{M}} (\Phi) \subset \, \vdash (\Phi)$. Olkoon $\varphi \notin \, \vdash (\Phi)$ joillakin mielivaltaisilla $\Phi \subset L, \varphi \in L$. Lemman 4.13 nojalla on olemassa täydellinen $\Psi_k \subset L$, jolle $\Phi \subset \Psi_k$ ja $\varphi \notin \Psi_k$. Olkoon sitten h sellainen $\mathcal{M}$-tulkinta, jolle pätee $h(p) = h_k(p)$ kaikilla $p \in p(L)$. Osoitetaan seuraavaksi, että $\Psi_k = h^{-1}(F)$. Selvästi $\Psi_k \subset h^{-1}(F)$. Koska Ψ_k on täydellinen ja $h^{-1}(F)$ on ristiriidaton, on oltava $\Psi_k = h^{-1}(F)$. Näin ollen $h(\varphi) \notin F$, jolloin $\varphi \notin \, \models_{\mathcal{M}} (\Psi_k)$ ja edelleen $\varphi \notin \, \models_{\mathcal{M}} (\Phi)$. Siis $\vdash \, = \, \models_{\mathcal{M}}$. □

Näytetään seuraavaksi, että seurauskuvauksella $\vdash_\Phi$, missä Φ on ristiriidaton ja invariantti, ei välttämättä ole yhdenmukaista mallia. Merkitään symbolilla $p(\Phi)$ joukon Φ lauseissa esiintyvien muuttujien, $p_i, i \in I$, joukkoa. Esimerkiksi $p(\{(p_1 \rightarrow (p_2 \equiv p_5))\}) = \{p_1, p_2, p_5\}$.

5.7. Lemma. Olkoon $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ malli ja Φ sekä Ψ sellaisia lausejoukkoja, joille

$$\models_{\mathcal{M}} (\Phi) \neq L \neq \models_{\mathcal{M}} (\Psi), \tag{1}$$

$$p(\Phi) \cap p(\Psi) = \emptyset. \tag{2}$$

Tällöin $\models_{\mathcal{M}} (\Phi \cup \Psi) \neq L$.

Todistus. Todetaan aluksi, että $\models_{\mathcal{M}} (\Phi) \neq L$ jos ja vain jos on olemassa $\mathcal{M}$-tulkinta h, jolla $h(\Phi) \subset F$. On siis olemassa $\mathcal{M}$-tulkinnat h_1, h_2, joille $h_1(\Phi) \subset F$ ja $h_2(\Psi) \subset F$. Olkoon h sellainen kuvaus, jolle

$$h(p_i) = \begin{cases} h_1(p_i), & \text{kun } p_i \in p(\Phi) \\ h_2(p_i), & \text{muuten} \end{cases}$$

kaikilla $i \in I$. Nyt $h(\Phi \cup \Psi) \subset F$, jolloin $\models_{\mathcal{M}} (\Phi \cup \Psi) \neq L$. $\square$

Olkoon $\Phi \subset L$ sellainen joukko, johon kuuluvat täsmälleen muotoa

$$(\varphi \to \varphi) \equiv (\psi \to \psi), \tag{1}$$

$$(\varphi \equiv \varphi) \equiv (\psi \equiv \psi) \tag{2}$$

olevat lauseet. Joukko Φ on ristiriidaton ja invariantti.

5.8. Lause. Seurauskuvauksella $\vdash_{\Phi}$ ei ole yhdenmukaista mallia.

Todistus. Olkoot $p_1, p_2 \in p(L)$,

$$\begin{array}{ll} \varphi \text{ lause} & (p_1 \to p_1) \equiv (p_1 \equiv p_1) \text{ ja} \\ \psi \text{ lause} & \neg((p_2 \to p_2) \equiv (p_2 \equiv p_2)). \end{array}$$

Nyt joukot $\{\varphi\}$ ja $\{\psi\}$ täyttävät lemman 5.7 kohdat (1) ja (2), joten $\models_{\mathcal{M}} (\{\varphi, \psi\}) \neq L$. Kuitenkin $\vdash_{\Phi} (\{\varphi, \psi\}) = L$. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi, että seurauskuvauksella $\vdash$ ei ole numeroituvaa yhdenmukaista mallia.

Lause II

5.9. Määritelmä. Olkoon $\langle\{0,1\},\tilde{\neg},\tilde{\rightarrow}\rangle$ algebra, jossa kuvaukset $\tilde{\neg}$ ja $\tilde{\rightarrow}$ toimivat arvatulla tavalla. Kuvausta $t : L \mapsto \{0,1\}$ kutsutaan *totuusjakaumaksi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $\varphi,\psi,\gamma,\delta \in L$:

(1) $t(\neg\varphi) = \tilde{\neg} t(\varphi)$,

(2) $t(\phi \rightarrow \psi) = t(\varphi) \mathbin{\tilde{\rightarrow}} t(\psi)$,

(3) $t(\varphi \equiv \varphi) = 1$,

(4) jos $t(\varphi \equiv \psi) = 1$, niin $t(\varphi) = t(\psi)$,

(5) jos $t(\varphi \equiv \psi) = 1$, niin $t(\neg\varphi \equiv \neg\psi) = 1$,

(6) jos $t(\varphi \equiv \psi) = t(\gamma \equiv \delta) = 1$, niin
$t((\varphi \rightarrow \gamma) \equiv (\psi \rightarrow \delta)) = t((\varphi \equiv \gamma) \equiv (\psi \equiv \delta)) = 1$.

5.10. Määritelmä.

$$\begin{aligned} L_0 &= p(L), \\ L_{n+1} &= L_n \cup \{\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \equiv \psi \mid \varphi,\psi \in L_n\}, \\ E_0 &= \emptyset, \\ E_{n+1} &= \{\varphi \in L_{n+1} \mid \varphi = \psi \equiv \gamma \text{ joillakin } \psi,\gamma \in L\}. \end{aligned}$$

5.11. Määritelmä. Kuvaus $h : L_n \mapsto \{0,1\}$ on *osittainen totuusjakauma*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $\varphi,\psi,\gamma,\delta \in L_{n-1}$:

(7) $h(\neg\varphi) = \tilde{\neg} h(\varphi)$,

(8) $h(\phi \rightarrow \psi) = h(\varphi) \mathbin{\tilde{\rightarrow}} h(\psi)$,

(9) $h(\varphi \equiv \varphi) = 1$,

(10) $h(\varphi \equiv \psi) = h(\psi \equiv \varphi)$,

(11) jos $h(\varphi \equiv \psi) = h(\psi \equiv \gamma) = 1$, niin $h(\varphi \equiv \gamma) = 1$,

(12) jos $h(\varphi \equiv \psi) = 1$, niin $h(\varphi) = h(\psi)$

ja seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $\varphi,\psi,\gamma,\delta \in L_{n-2}$:

(13) jos $h(\varphi \equiv \psi) = 1$, niin $h(\neg\varphi \equiv \neg\psi) = 1$,

(14) jos $h(\varphi \equiv \psi) = h(\psi \equiv \gamma) = 1$, niin
$t((\varphi \rightarrow \gamma) \equiv (\psi \rightarrow \delta)) = t((\varphi \equiv \gamma) \equiv (\psi \equiv \delta)) = 1$.

Merkitään symbolilla OTJ_n joukkoa

$$\{h : L_n \mapsto \{0,1\} \mid h \text{ on osittainen totuusjakauma}\}.$$

5.12. Huomautus. Houkutuksena olisi määritellä totuusjakauma yksinkertaisesti $\mathcal{M}$-tulkinnaksi, missä $\mathcal{M}$ olisi kaksialkioinen malli, jossa on alkiot 0 ja 1. Tämä ei kuitenkaan käy, koska totuusjakauman halutaan voivan esimerkiksi kuvata lauseet φ ja ψ alkiolle 1 ja lauseen $\varphi \equiv \psi$ alkiolle 0.

5.13. Määritelmä. Määritellään jokaista $h \in OTJ_n$ kohti kaksi joukon L_n ekvivalenssirelaatiota[†] $F(h)$ ja $G(h)$:

$$F(h) = \{\varphi \equiv \psi \in E_{n+1} \mid h(\varphi) = h(\psi)\},$$

$$\chi \in G(h)$$

jos ja vain jos

(i) $$\chi = \neg\varphi \equiv \neg\psi \text{ ja } h(\varphi \equiv \psi) = 1$$

tai

(ii) $$\chi = (\varphi \to \gamma) \equiv (\psi \to \delta) \text{ tai } \chi = (\varphi \equiv \gamma) \equiv (\psi \equiv \delta) \text{ ja}$$
$$h(\varphi \equiv \psi) = h(\gamma \equiv \delta) = 1.$$

5.14. Määritelmä. Määritellään jokaista $h \in OTJ_n$ kohti kaksi kuvausta $h^0, h^+ : L_{n+1} \mapsto \{0,1\}$ seuraavasti:

$$h^0(\varphi) = h^+(\varphi) = h(\varphi)$$

kaikilla $\varphi \in L_n$ ja lisäksi

$$\begin{aligned}
&h^0(\neg\varphi) = h^+(\neg\varphi) = \tilde{\neg} h(\varphi),\\
&h^0(\varphi \to \psi) = h^+(\varphi \to \psi) = h(\varphi) \tilde{\to} h(\psi),\\
&h^0(\varphi \equiv \psi) = 1 \text{ jos ja vain jos } (\varphi \equiv \psi) \in G(h),\\
&h^+(\varphi \equiv \psi) = 1 \text{ jos ja vain jos } (\varphi \equiv \psi) \in F(h).
\end{aligned}$$

kaikilla $\varphi, \psi \in L_{n+1} - L_n$.

[†]Tässä siis joukon L_n relaatiolla tarkoitetaan joukon E_{n+1} osajoukkoa.

5.15. Huomautus. Olkoon $h \in OTJ_n$. Tällöin $h^0, h^+ \in OTJ_{n+1}$.

5.16. Määritelmä. Lauseissa φ ja ψ on sama *pääkonnektiivi*, jos jokin seuraavista ehdoista on voimassa:

- $\varphi, \psi \in p(L)$,
- φ on lause $\neg\gamma$ ja ψ on lause $\neg\delta$,
- φ on lause $\gamma_0 \to \delta_0$ ja ψ on lause $\gamma_1 \to \delta_1$,
- φ on lause $\gamma_0 \equiv \delta_0$ ja ψ on lause $\gamma_1 \equiv \delta_1$.

Huomataan lisäksi, että lauseissa φ ja ψ on sama pääkonnektiivi, jos $\varphi, \psi \in G(h)$, kun h on osittainen totuusjakauma. Jos lauseissa φ ja ψ on sama pääkonnektiivi, sanomme, että lause $\varphi \equiv \psi$ on samaistava.

5.17. Määritelmä. Osittainen totuusjakauma $h \in OTJ_n$ on *samaistava*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) $h(p_i \equiv p_j) = 1$ kaikilla $i, j \in I$,

(2) lauseissa φ ja ψ on sama pääkonnektiivi, kun $h(\varphi \equiv \psi) = 1$,

(3) $h(\varphi \equiv \psi) = 0$ ja $h(\varphi) = h(\psi)$ jollakin $\varphi \equiv \psi \in E_{n+1}$.

5.18. Lemma. Joukossa OTJ_2 on samaistava osittainen totuusjakauma.

Todistus. Selvästi on olemassa $h \in OTJ_1$, jolle $h(p_i \equiv p_j) = 1$ kaikilla $i, j \in I$. Osoitetaan, että h^0 on samaistava. Määritelmän 5.17 ehdot (1) ja (2) ovat selvästi voimassa. Lisäksi huomataan, että

$$h^0(p \equiv (p \equiv p)) = h^0((\neg p) \equiv (p \equiv p)) = 0,$$

kun $p \in p(L)$. Toisaalta joko

$$\begin{aligned} h^0(p) &= h^0(p \equiv p) \text{ tai} \\ h^0(\neg p) &= h^0(p \equiv p). \end{aligned}$$

□

5.19. Lemma. Olkoon $n > 1$ ja $h : L_n \mapsto \{0, 1\}$ samaistava osittainen totuusjakauma. Tällöin $h^0 : L_{n+1} \mapsto \{0, 1\}$ on samaistava.

Todistus. Kuten edellisessä todistuksessa huomattiin, määritelmän 5.17 ehdot (1) ja (2) ovat selvästi voimassa. Olkoon sitten φ sellainen joukon L_{n-1} alkio, että $h(\varphi) = 0$. Näin ollen $\neg\varphi, \varphi \to \varphi \in L_n$. Lisäksi pätee $h^0(\neg\varphi) = h^0(\psi \to \psi)$ ja $\neg\varphi \equiv (\varphi \to \varphi) \in E_{n+1}$. Koska lauseissa $\neg\varphi$ ja $\varphi \to \varphi$ on eri pääkonnektiivi, on oltava $h^0(\neg\varphi \equiv (\varphi \to \varphi)) = 0$. □

5.20. Lemma. Olkoon $n > 0$, $h \in OTJ_n$ ja $p \in p(L)$. Tällöin h^+ ei ole samaistava.

Todistus. Osoitetaan, että määritelmän 5.17 ehto (2) ei ole voimassa. Oletetaan, että $\varphi \in L_{n-1} - E_{n-1}$. Tällöin $\varphi, \neg\varphi \in L_n$. Jos $h(\varphi) = 1$, niin $h^+(\varphi \equiv (p \to p)) = 1$. Samoin jos $h(\neg\varphi) = 1$, niin $h^+(\neg\varphi \equiv (p \to p)) = 1$. Kuitenkin lauseissa φ ja $p \to p$ on eri pääkonnektiivi. Myös lauseissa $\neg\varphi$ ja $p \to p$ on eri pääkonnektiivi. □

5.21. Lemma. Olkoon $n > 1$ ja $h \in OTJ_n$ samaistava. Tällöin on olemassa samaistava $h^* \in OTJ_{n+1}$, jolle $h(\varphi) = h^*(\varphi)$ kaikilla $\varphi \in L_n$ ja $h^* \neq h^0$.

Todistus. Oletuksen nojalla pätee $h(\varphi \equiv \psi) = 0$ ja $h(\varphi) = h(\psi)$ jollakin $\varphi \equiv \psi \in E_n$. Tällöin $\neg\varphi \equiv \neg\psi \in E_{n+1} - G(h)$. Olkoon sitten R pienin joukon L_n ekvivalenssirelaatio[†], jolle $G(h) \cup \{\neg\varphi \equiv \neg\psi\} \subset R$. Määritellään h^* seuraavasti:

- $h^*(\gamma) = h(\gamma)$, kun $\gamma \in L_n$,
- $h^*(\neg\gamma) = \tilde{\neg} h(\gamma)$,
- $h^*(\gamma \to \delta) = h(\gamma) \tilde{\to} h(\delta)$,
- $h^*(\gamma \equiv \delta) = 1$ jos ja vain jos $\gamma \equiv \delta \in R$,

kun $\neg\gamma, \gamma \to \delta, \gamma \equiv \delta \in L_{n+1} - L_n$. Tällöin $h^* \in OTJ_{n+1}$. Koska $R \neq G(h)$, on oltava $h^* \neq h^0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että h^* on samaistava. Määritelmän 5.17 kohta (1) on tietysti voimassa. Seuraavaksi huomataan, että kaikki joukon $G(h) \cup \{\neg\varphi \equiv \neg\psi\}$ lauseet ovat samaistavia. Näin ollen relaation R minimaalisuudesta seuraa, että kaikki $\varphi \in R$ ovat samaistavia. Siispä määritelmän 5.17 kohta (2) pätee. Käyttämällä samanlaista päättelyä kuin todistuksessa 5.19 todetaan, että $h^*(\neg\gamma \equiv (\gamma \to \gamma)) = 0$ jollakin $\gamma \in L_{n-1}$. Siis myös kohta (3) pätee. □

5.22. Huomautus. Olkoon $(h_0, h_1, h_2, ...)$ jono osittaisia totuusjakaumia, joille $h_n \in OTJ_n$. Jos lisäksi kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee, että h_n on kuvauksen h_{n+1} rajoittuma, niin on olemassa yksikäsitteinen totuusjakauma $t = \lim_{n\to\infty} h_n$.

5.23. Lemma. On olemassa bijektio

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \{t \in TJ \mid t(p_i = p_j) = 1 \text{ kaikilla } i, j \in I\}.$$

[†]Otetaan siis transitiivinen sulkeuma refleksisoidusta ja symmetrisoidusta relaatiosta.

Todistus. Olkoon $(c_o, c_1, c_2, ...) = c \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ja $h_2 \in OTJ_2$ samaistava. Olkoot lisäksi h_0, h_1 kuvauksen h_2 rajoittumia joukkoihin L_0 ja L_1. Oletetaan, että h_n on määritelty jollain $n > 1$. Valitaan h_{n+1} seuraavasti:

$$h_{n+1} = \begin{cases} h_n^0, & \text{jos } c_{n-1} = 0, \\ h_n^*, & \text{jos } c_{n-1} = 1. \end{cases}$$

Olkoon sitten $f(c) = \lim_{n\to\infty} h_n$. Koska $h_n^0 \neq h_n^*$, kuvaus f on bijektio. $\square$

Täydellisen teorian Φ sanotaan olevan samaistava, jos $p_i \equiv p_j \in \Phi$ kaikilla $i, j \in I$. Jos h on $\mathcal{M}$-tulkinta ja $h(p_i) = h(p_j)$ kaikilla $i, j \in I$, niin kuvauksen h sanotaan olevan samaistava.

5.24. Lemma. Samaistavia täydellisiä teorioita on ylinumeroituva määrä.

Todistus. Osoitetaan, että jokainen totuusjakauma on jonkun täydellisen teorian karakteristinen funktio.

Olkoon t totuusjakauma ja olkoon $\Phi_t = \{\varphi \in L \mid t(\varphi) = 1\}$. On helppo nähdä, että aksioomat ovat joukossa Φ_t, jolloin määritelmän 5.9 ehdosta (2) seuraa, että Φ_t on teoria. Totuusjakauman määritelmän kohdasta (1) puolestaan seuraa teorian Φ_t ristiriidattomuus. Oletetaan, että $\Psi \subset L$ on ristiriidaton ja $\Phi_t \subset \Psi$. Olkoon lisäksi $t(\varphi) = 0$, jolloin $\neg\varphi \in \Psi$ ja edelleen $\varphi \notin \Psi$. Siis Φ_t on täydellinen.

Selvästikin totuusjakauman t määräävä teoria on yksikäsitteinen ja kuvaus $t \mapsto \Phi_t$ injektio. Alkuperäinen väite seuraa näin ollen lemmasta 5.23. $\square$

5.25. Lemma. Seurauskuvauksella $\vdash$ on yhdenmukainen malli $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ jos ja vain jos kaikilla täydellisillä teorioilla Φ on olemassa homomorfismi $h : \mathcal{L} \to \mathcal{A}$, jolle $h^{-1}(F) = \Phi$.

Todistus. Olkoon $\vdash\, = \,\models_{\mathcal{M}}$ ja Φ täydellinen. Koska $\Phi = \,\models_{\mathcal{M}} (\Phi)$, on olemassa $h : \mathcal{L} \to \mathcal{A}$, jolle $\Phi \subset h^{-1}(F)$. Olkoon sitten $\varphi \in h^{-1}(F)$. Koska Φ on täydellinen, joko $\varphi \in \Phi$ tai $\neg\varphi \in \Phi$. Selvästi $\neg\varphi \notin \Phi$, joten $\Phi = h^{-1}(F)$.

Oletetaan seuraavaksi, että $\Phi \subset L$ ja $\varphi \notin\, \vdash (\Phi)$. Tällöin Φ on ristiriidaton, ja se voidaan Lindenbaumin lemman nojalla laajentaa täydelliseksi Ψ, jolle $\varphi \notin \Psi$. Nyt on olemassa homomorfismi $h : \mathcal{L} \to \mathcal{A}$, jolle $h^{-1}(F) = \Psi$. Näin ollen $\varphi \notin h^{-1}(F)$ ja edelleen $\varphi \notin\, \models_{\mathcal{M}} (\Phi)$. $\square$

5.26. Lause II. Jos $\vdash \, = \, \models_{\mathcal{M}}$, niin $\mathcal{M}$ on ylinumeroituva.

Todistus. Tehdään vastaoletus: malli $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ on numeroituva. Olkoon Φ samaistava täydellinen teoria. Jos $h^{-1}(F) = \Phi$ jollain $\mathcal{M}$-tulkinnalla h, niin h on samaistava. Samaistavia $\mathcal{M}$-tulkintoja on korkeintaan mallin $\mathcal{M}$ alkioiden verran. Näin ollen samaistavia täydellisiä teorioita on korkeintaan numeroituva määrä. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi, että sellaisia syntaksisia seurauskuvauksia, joilla on yhdenmukainen malli, on melko paljon. Todistuksen ideana on rakentaa ylinumeroituva määrä syntaksisia seurauskuvauksia, joilla on niin kutsuttu heikosti yhdenmukainen malli. Heikosti yhdenmukaisen mallin olemassaolosta seuraa myös yhdenmukaisen mallin olemassaolo.

Lause III

5.27. Määritelmä. Olkoon $P = \{x_0, x_1, x_2, ...\} \subset \mathbb{N}$ sellainen osajoukko, joka toteuttaa ehdot:

$$\begin{aligned}
&\#P = \infty, \\
&x_0 = 0, x_1 = 1, \\
&x_i < x_j, \text{ kun } 0 < i < j.
\end{aligned}$$

Olkoot $\tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}$ ja $\tilde{\equiv}$ kuvauksia, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

$$\tilde{\neg} x_i = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = 0, \\ 0 & \text{muuten,} \end{cases}$$

$$x_i \tilde{\rightarrow} x_j = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = 0, \\ 0, & \text{jos } i \neq 0 \text{ ja } j = 0, \\ x_{j+1}, & \text{jos } 0 < i \leq j < i + x_i - 1, \\ x_i & \text{muuten,} \end{cases}$$

$$x_i \tilde{\equiv} x_j = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0 & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä $x_i, x_j \in P$.

Merkitään SCI-algebraa $\langle P, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv} \rangle$ symbolilla $\mathcal{A}_P$. P-*malliksi* kutsutaan paria $\langle \mathcal{A}_P, P \setminus \{0\} \rangle$.

5.28. Huomautus. P-malli on SCI-malli. Tämä seuraa suoraan kuvausten $\tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv}$ määrittelystä.

Olkoon $p \in p(L)$. Merkitään symbolilla p^n sellaista lausetta, jolle

$$\begin{aligned}
p^1 &= p \rightarrow p, \\
p^{n+1} &= p \rightarrow (p^n).
\end{aligned}$$

Merkitään symbolilla $\vee\varphi_n$ sellaista lausetta, jolle

$$\begin{aligned}
\vee\varphi_2 &= (p^1 \equiv p), \\
\vee\varphi_{n+1} &= (\neg(p^n \equiv p) \rightarrow \vee\varphi_n).
\end{aligned}$$

Olkoon sitten

$$\varphi_n = (p^n \equiv p) \rightarrow \vee\varphi_n.$$

5.29. Määritelmä. Olkoon $x_i \in P$. Määritellään potenssiin korottaminen mallissa vastaavanlaiseksi kuin kielessä:

$$\begin{aligned} x_i^1 &= x_i \tilde{\rightarrow} x_i, \\ x_i^{n+1} &= x_i \tilde{\rightarrow} (x_i^n). \end{aligned}$$

5.30. Huomautus. Olkoon $n > 0$ ja $i > 1$. P-mallin kuvauksen $\tilde{\rightarrow}$ määritelmästä seuraa, että

$$\begin{aligned} x_1^n &= x_1, \\ x_i^n &= x_i \text{ jos ja vain jos } n = m \cdot x_i, \end{aligned}$$

missä $m \geq 1$.

5.31. Lemma. Olkoon $\mathcal{M}_P$ P-malli, $n > 1$ ja $n \in P$. Tällöin lause φ_n on epätosi mallissa $\mathcal{M}_P$.

Todistus. Olkoon n kuin yllä. Tällöin on olemassa $i > 1$, jolle $x_i = n$. Olkoon lisäksi h sellainen $\mathcal{M}_P$-tulkinta, jolle $h(p) = x_i$. Edellisen huomautuksen nojalla $x_i^n = x_i$ ja $x_i^m \neq x_i$, kun $0 < m < n$. Näin ollen lause $p^n \equiv p$ ja lauseet $\neg(p^m \equiv p)$ ovat tosia mallissa $\mathcal{M}_P$. Siis φ_n on epätosi mallissa $\mathcal{M}_P$. □

5.32. Lemma. Olkoon $\mathcal{M}_P$ P-malli, $n > 1$ ja $n \notin P$. Tällöin lause φ_n on tosi mallissa $\mathcal{M}_P$.

Todistus. Tehdään vastaoletus: lause φ_n ei ole tosi. Tällöin on olemassa $\mathcal{M}_P$-tulkinta h, jolle $h(\varphi_n) = 0$. Olkoon sitten $h(p) = x_i$. Nyt $x_i^n = x_i$, joten $n = m \cdot x_i$ jollain $m \geq 1$. Koska $x_i^l \neq x_i$, kun $0 < l < n$, niin on oltava $m = 1$. Tällöin kuitenkin $n = x_i$ vastoin oletusta. Siispä lause φ_n on tosi mallissa $\mathcal{M}_P$. □

5.33. Lemma. Olkoot P ja Q joukon $\mathbb{N}$ osajoukkoja, joille $0, 1 \in P \cap Q$ ja $P \neq Q$. Tällöin $TR(\mathcal{M}_P) \neq TR(\mathcal{M}_Q)$.

Todistus. Olkoot P ja Q kuin yllä. Oletetaan lisäksi, että on olemassa $n > 1$, jolle $n \in P$ ja $n \notin Q$. Lemman 5.31 nojalla $\varphi_n \notin TR(\mathcal{M}_P)$. Toisaalta lemman 5.32 nojalla $\varphi_n \in TR(\mathcal{M}_Q)$. □

5.34. Määritelmä. Syntaktisella seurauskuvauksella $\vdash_\Phi$ on heikosti yhdenmukainen malli, jos $\vdash_\Phi (\emptyset) = \models_\mathcal{M} (\emptyset)$ jollain mallilla $\mathcal{M}$.

5.35. Lemma. Sellaisia syntaktisia seurauskuvauksia, joilla on heikosti yhdenmukainen malli, on ylinumeroituva määrä.

Todistus. Olkoon $\mathcal{M}_P$-P-malli. Nyt $\vdash_{TR(\mathcal{M}_P)} (\emptyset) = \vdash (TR(\mathcal{M}_P)) = TR(\mathcal{M}_P)$ ja lisäksi $\vdash_{TR(\mathcal{M}_P)} \neq \vdash_{TR(\mathcal{M}_Q)}$, kun $\mathcal{M}_Q$ on P-malli, jolle $P \neq Q$.

Koska sellaisia luonnollisten lukujen osajoukkoja P, joille $0, 1 \in P$, on ylinumeroituva määrä, myös sellaisia syntaktisia seurauskuvauksia, joilla on heikosti yhdenmukainen malli, on ylinumeroituva määrä. □

5.36. Määritelmä. Seurauskuvaus $C : \mathcal{P}(L) \mapsto \mathcal{P}(L)$ on *äärellisluonteinen*, jos kaikilla $\Phi \subset L$ ja kaikilla $\varphi \in C(\Phi)$ on olemassa äärellinen $\Psi \subset \Phi$, jolla $\varphi \in C(\Psi)$.

5.37. Huomautus. Millään syntaktisella seurauskuvauksella ei ole yhdenmukaista P-mallia.

Todistus. Osoitetaan, että semanttinen seurauskuvaus $\models_{\mathcal{M}_P}$ ei ole äärellisluonteinen millään P-mallilla $\mathcal{M}_P$. Olkoon $\mathcal{M}_P$ P-malli ja

$$\Phi = \{\neg(p^n \equiv p) \mid n > 0\}.$$

Osoitetaan, että

$$\begin{aligned} &\neg(p \to p) \in \models_{\mathcal{M}_P} (\Phi), \text{ mutta} \\ &\neg(p \to p) \notin \models_{\mathcal{M}_P} (\Psi) \end{aligned}$$

kaikilla äärellisillä $\Psi \subset \Phi$.

Olkoon h mielivaltainen $\mathcal{M}_P$-tulkinta ja $h(p) = x_i$. Merkitään $x_i = n$. Nyt $x_i^n = x_i$, joten $h(\neg(p \equiv p)) = 0$ ja edelleen $h(\Phi) \not\subset P \setminus \{0\}$. Siis $\neg(p \to p) \in \models_{\mathcal{M}_P} (\Phi)$.

Seuraavaksi riittää löytää sellainen $\mathcal{M}_P$-tulkinta h, jolla $h(\Psi) \subset P \setminus \{0\}$. Tällainen löytyy helposti: olkoon $h(p) = x_0$. Nyt $x_0^n \neq x_0$ kaikilla $n > 0$. Siispä $h(\Psi) \subset P \setminus \{0\}$ ja edelleen $\neg(p \to p) \notin \models_{\mathcal{M}_P} (\Psi)$.

Toisaalta jokainen syntaktinen seurauskuvaus on äärellisluonteinen, koska jokaisen lauseen todistus on äärellinen. Näin ollen $\vdash_\Phi \neq \models_{\mathcal{M}_P}$ kaikilla syntaktisilla seurauskuvauksilla $\vdash_\Phi$ ja kaikilla P-malleilla $\mathcal{M}_P$. □

5.38. Määritelmä. Olkoon J joukko. Joukon J *suodatin* on epätyhjä perhe $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(J)$, joka toteuttaa ehdot F1-F3:

F1: $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
F2: Jos $A, B \in \mathcal{F}$, niin $A \cap B \in \mathcal{F}$.
F3: Jos $A \subset B \subset J$ ja $A \in \mathcal{F}$, niin $B \in \mathcal{F}$.

Maksimaalista suodatinta kutsutaan *ultrasuodattimeksi*.

5.39. Lemma. Jokainen suodatin voidaan laajentaa ultrasuodattimeksi.

Todistus. Olkoon $\mathcal{F}$ joukon J suodatin. Olkoon lisäksi K järjestetyn joukon $\langle \Gamma, \subset \rangle$ ketju, missä $\Gamma = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \mid \mathcal{F}' \text{ on suodatin}\}$. Selvästi Γ on epätyhjä ja $\bigcup K = \sup K$ on suodatin. Zornin lemman nojalla joukossa Γ on maksimaalinen alkio $\mathcal{U}$. □

5.40. Lemma. Olkoon $\mathcal{F}$ joukon J suodatin. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- Kaikilla $A \subset J$ pätee: joko $A \in \mathcal{F}$ tai $J \setminus A \in \mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}$ on ultrasuodatin.

Todistus. Oletetaan, että $\mathcal{F}$ ei ole maksimaalinen. Tällöin on olemassa suodatin $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$, jolle $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Olkoon $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$. Nyt jos $J \setminus A \in \mathcal{F}$, niin olisi oltava $(J \setminus A) \cap A = \emptyset \in \mathcal{F}'$.

Oletetaan seuraavaksi, että $\mathcal{F}$ on ultrasuodatin ja $J \setminus A \notin \mathcal{F}$. Tällöin $A \neq \emptyset$ ja $A \cap B \neq \emptyset$ kaikilla $B \in \mathcal{F}$. Näin ollen $B \cap C \neq \emptyset$ kaikilla $B, C \in \mathcal{F} \cup \{A\}$. Helposti nähdään, että

$$\mathcal{F}' = \{B \subset J \mid \text{on olemassa } C, D \in \mathcal{F} \cup \{A\}, \text{ joilla } C \cap D \subset B\}$$

on suodatin. On siis oltava $A \in \mathcal{F}$. □

5.41. Määritelmä. Olkoon $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ malli, J joukko ja $\mathcal{U}$ joukon J ultrasuodatin. Merkitään $A^J = \{f \mid f \text{ on kuvaus } J \mapsto A\}$ ja määritellään joukon A^J relaatio $\approx$ seuraavasti:

$$f \approx g \text{ jos ja vain jos } \{j \in J \mid f(j) = g(j)\} \in \mathcal{U}.$$

Relaatio $\approx$ on selvästi ekvivalenssirelaatio. Olkoon nyt $A^J/\mathcal{U} = A^J/\approx$ ja

$$F^J/\mathcal{U} = \{[f] \mid f \in A^J, f(j) \in F \text{ kaikilla } j \in J\}.$$

Jokaista $f, g \in A^J$ kohti määritellään kuvaukset $s^{\rightarrow}_{fg}, s^{\equiv}_{fg} : J \mapsto A$, joille

$$\begin{aligned} s^{\rightarrow}_{fg}(j) &= f(j) \mathrel{\tilde{\rightarrow}} g(j) \text{ ja} \\ s^{\equiv}_{fg}(j) &= f(j) \mathrel{\tilde{\equiv}} g(j). \end{aligned}$$

Olkoon sitten $\tilde{\neg}^*, \tilde{\rightarrow}^*$ ja $\tilde{\equiv}^*$ kuvauksia, joille

$$\begin{aligned}
&(1) && \tilde{\neg}^*[f] = [\tilde{\neg} \circ f], \\
&(2) && [f]\tilde{\to}^*[g] = [s^{\to}_{fg}], \\
&(3) && [f]\tilde{\equiv}^*[g] = [s^{\equiv}_{fg}].
\end{aligned}$$

Paria $\mathcal{M}^J/\mathcal{U} = \langle \mathcal{A}^J/\mathcal{U}, F^J/\mathcal{U} \rangle$, missä $\mathcal{A}^J/\mathcal{U} = \langle A^J/\mathcal{U}, \tilde{\neg}^*, \tilde{\to}^*, \tilde{\equiv}^* \rangle$, kutsutaan mallin $\mathcal{M}$ *ultrapotenssiksi.*

5.42. Huomautus. Kuvaukset $\tilde{\neg}^*, \tilde{\to}^*$ ja $\tilde{\equiv}^*$ ovat hyvin määriteltyjä.

Todistus. Oletetaan $[f] = [f']$ ja $[g] = [g']$.

- Nyt $f \approx f'$, jolloin $\tilde{\neg} \circ f \approx \tilde{\neg} \circ f'$, jolloin

$$\tilde{\neg}^*[f] = [\tilde{\neg} \circ f] = [\tilde{\neg} \circ f'] = \tilde{\neg}^*[f'].$$

- Olkoon

$$\begin{aligned}
&A = \{j \in J \mid f(j) = f'(j)\} \cap \{j \in J \mid g(j) = g'(j)\} \text{ ja} \\
&B = \{j \in J \mid s^{\to}_{fg}(j) = s^{\to}_{fg}(j)\}.
\end{aligned}$$

  Nyt $A \in \mathcal{U}$ ja $A \subset B$, jolloin $B \in \mathcal{U}$. Siispä

$$[f]\tilde{\to}^*[g] = [s^{\to}_{fg}] = [s^{\to}_{f'g'}] = [f']\tilde{\to}^*[g'].$$

- Edeltävän päättelyn mukaisesti

$$[f]\tilde{\equiv}^*[g] = [s^{\equiv}_{fg}] = [s^{\equiv}_{f'g'}] = [f']\tilde{\equiv}^*[g'].$$

□

5.43. Lemma. Mallin $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ ultrapotenssi $\mathcal{M}^J/\mathcal{U}$ on SCI-malli.

Todistus. Olkoon a joukon F mielivaltainen alkio ja b joukon $A \setminus F$ mielivaltainen alkio. Määritellään jokaista kuvausta $f : J \mapsto A$ kohti kuvaukset $f_F, f_A : J \mapsto A$ seuraavasti:

$$f_F(j) = \begin{cases} f(j), & \text{kun } f(j) \in F, \\ a, & \text{muuten.} \end{cases} \qquad f_A(j) = \begin{cases} f(j), & \text{kun } f(j) \notin F, \\ b, & \text{muuten.} \end{cases}$$

- Oletetaan, että $\tilde{\neg}^*[f] \in F^J/\mathcal{U}$ ja $[f] \in F^J/\mathcal{U}$. Tällöin on olemassa $g, f'J \mapsto A$, joille $g(j), f(j) \in F$ kaikilla $j \in J$ ja $g \approx \tilde{\neg} \circ f$ sekä $f' \approx f$. Nyt

$$\emptyset = \{j \in J \mid g(j) = (\tilde{\neg} \circ f')(j)\} \in \mathcal{U}.$$

On siis oltava $[f] \notin F^J/\mathcal{U}$. Oletetaan sitten, että $[f] \notin F^J/\mathcal{U}$. Tällöin on oltava

$$\{j \in J \mid f(j) \notin F\} \in \mathcal{U},$$

jolloin $f \approx f_A$. Nyt $\tilde{\neg}^*[f] = \tilde{\neg}^*[f_A]$, joten $\tilde{\neg}^*[f] \in F^J/\mathcal{U}$.

- Oletetaan, että $[f]\tilde{\rightarrow}^*[g] \in F^J/\mathcal{U}$ ja $[f] \in F^J/\mathcal{U}$. Tällöin on olemassa $s, f' : J \mapsto A$, joille $s(j), f'(j) \in F$ kaikilla $j \in J$ ja $s \approx [f]\tilde{\rightarrow}^*[g]$ sekä $f' \approx f$. Nyt

$$\begin{aligned}&\{j \in J \mid f'(j)\tilde{\rightarrow}g(j) = s(j)\} \in \mathcal{U}, \text{ jolloin}\\ &\{j \in J \mid g(j) \in F\} \in \mathcal{U}.\end{aligned}$$

Lisäksi pätee

$$\{j \in J \mid g(j) \in F\} \subset \{j \in J \mid g(j) = g_F(j)\},$$

joten $g \approx g_F$ ja edelleen $[g] \in F^J/\mathcal{U}$.

Oletetaan seuraavaksi, että $[f] \notin F^J/\mathcal{U}$ tai $[g] \in F^J/\mathcal{U}$. Jos jälkimmäinen ehto on voimassa, niin selvästi $[f]\tilde{\rightarrow}^*[g] \in F^J/\mathcal{U}$. Oletetaan siis $[f] \notin F^J/\mathcal{U}$. Nyt $\{j \in J \mid f(j) \notin F\} \in \mathcal{U}$, joten on olemassa $f' : J \mapsto A$, jolle $f'(j) \notin F$ kaikilla $j \in J$ ja $f' \approx f$. On siis oltava $[f]\tilde{\rightarrow}^*[g] \in F^J/\mathcal{U}$.

- Todetaan aluksi, että $[f] \tilde{\equiv}^*[g] = [f] \tilde{\equiv}^*[f] \in F^J/\mathcal{U}$, jos $[f] = [g]$. Oletetaan siis, että $[f] \tilde{\equiv}^*[g] \in F^J/\mathcal{U}$. Tällöin on olemassa kuvaus $s : J \mapsto A$, jolle $s(j) \in F$ kaikilla $j \in J$ ja $s \approx s^{\equiv}_{fg}$. Nyt

$$\{j \in J \mid s^{\equiv}_{fg}(j) = s(j)\} \subset \{j \in J \mid f(j) = g(j)\},$$

joten $f \approx g$ ja edelleen $[f] = [g]$.

$\square$

5.44. Lemma. Olkoon $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ SCI-malli. Oletetaan, että kuvaus $h_j : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}$ on homomorfismi kaikilla $j \in J$ ja valitaan sellainen kuvaus $h^* : L \mapsto A^J$, jolla $h^*(\varphi)(j) = h_j(\varphi)$ kaikilla $\varphi \in L$. Tällöin kaavalla

$$h^+(\varphi) = [h^*(\varphi)]$$

määritelty kuvaus $h^+ : L \mapsto \mathcal{M}^J/\mathcal{U}$ on homomorfismi.

Todistus. Olkoot $\varphi, \psi \in L$. Tarkistetaan homomorfismin ehdot:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad h^+(\neg\varphi) = [h^*(\neg\varphi)] &&= [\tilde{\neg} \circ h^*(\varphi)] = \tilde{\neg}^* h^+(\varphi),\\
&(2) \qquad h^+(\varphi \to \psi) = [h^*(\varphi \to \psi)] &&= [s^{\to}_{h^*(\varphi)h^*(\psi)}] = h^+(\varphi) \tilde{\to}^* h^+(\psi),\\
&(3) \qquad h^+(\varphi \equiv \psi) = [h^*(\varphi \equiv \psi)] &&= [s^{\equiv}_{h^*(\varphi)h^*(\psi)}] = h^+(\varphi) \tilde{\equiv}^* h^+(\psi).
\end{aligned}$$

$\square$

5.45. Lemma. Lause φ on tosi mallissa $\mathcal{M}$ jos ja vain jos lause φ on tosi mallin $\mathcal{M}$ ultrapotenssissa $\mathcal{M}^J/\mathcal{U}$

Todistus. Oletetaan, että $\varphi \in \models_{\mathcal{M}^J/\mathcal{U}} (\emptyset)$. On helppo nähdä, että myös $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\emptyset)$, jo pelkästään siitä, että kuvaus $h' : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^J/\mathcal{U}$, jolle

$$h'(a) = [f_a], \text{ missä } f_a(j) = a \text{ kaikilla } j \in J,$$

on homomorfismi. Näin ollen $h' \circ h$ on homomorfismi kaikilla homomorfismeilla $h : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{A}$. Lisäksi h' kuvaa jokaisen joukon F alkion joukkoon $\mathcal{F}^J/\mathcal{U}$.

Oletetaan, että $\varphi \notin \models_{\mathcal{M}^J/\mathcal{U}} (\emptyset)$. Tällöin on olemassa homomorfismi $h : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{A}^J/\mathcal{U}$, jolle $h(\varphi) \notin \mathcal{F}^J/\mathcal{U}$. Määritellään jokaista $j \in J$ kohti kuvaus $h'_j : p(L) \mapsto A$ kaavalla

$$h'_j(p) = f_p(j),$$

missä f_p on ekvivalenssiluokasta $h(p)$ valittu edustaja. Laajennetaan jokainen h'_j homomorfismiksi $h_j : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{A}$. Nyt lemman 5.44 nojalla kuvauksista h_j saatu kuvaus h^+ on homomorfismi. Osoitetaan induktiolla lauseen ψ rakenteen suhteen, että $h^+ = h$:

- Jos $\psi = p$, niin $h^+(p) = [h^*(p)]$, missä $h^*(p)(j) = h_j(p) = h'_j(p) = f_p(j)$ ja $[f_p] = h(p)$.
- Jos $\psi = \neg\gamma$, niin $h^+(\neg\gamma) = \tilde{\neg}^* h^+(\gamma) = \tilde{\neg}^* h(\gamma) = h(\neg\gamma)$.

- Oletetaan, että $\psi = \gamma \to \delta$, ja että väite pätee lauseille γ, δ. Nyt $h^+(\gamma \to \delta) = h^+(\gamma) \tilde{\to}^* h^+(\delta) = h(\gamma) \tilde{\to}^* h(\delta) = h(\gamma \to \delta)$.
- Väite $h^+(\gamma \equiv \delta) = h(\gamma \equiv \delta)$ todistuu samalla tavalla kuin edellinen kohta.

Olkoon sitten f_φ ekvivalenssiluokan $h(\varphi)$ edustaja. Jos olisi

$$\{j \in J \mid f_\varphi(j) \in F\} \in \mathcal{U},$$

niin olisi myös $f_\varphi \approx f_F$. On siis oltava

$$\{j \in J \mid f_\varphi(j) \in F\} \notin \mathcal{U}, \text{ jolloin } \{j \in J \mid h_j(\varphi) \in F\} \notin \mathcal{U}.$$

Nyt on olemassa $j \in J$, jolla $h_j(\varphi) \notin F$, joten $\varphi \notin \models_{\mathcal{M}} (\emptyset)$. $\square$

Valitaan seuraavaksi joukko J ja joukon J ultrasuodatin $\mathcal{U}$. Valinta tehdään sillä tavalla, että seuraavan lemman todistus sujuu kohtuullisen mutkattomasti. Olkoon J jatkossa joukon L äärellisten osajoukkojen perhe.

Olkoon sitten

$$\begin{aligned} I_\Phi &= \{\Psi \in J \mid \Phi \subset \Psi\}, \\ \mathcal{F} &= \{\Delta \subset J \mid \text{on olemassa } \Phi \in J, \text{ jolla } I_\Phi \subset \Delta\}. \end{aligned}$$

Todetaan, että $\mathcal{F}$ on joukon J suodatin:

F1: Tyhjä joukko ei voi kuulua joukkoon $\mathcal{F}$, koska joukko I_Φ on epätyhjä kaikilla $\Phi \subset L$.
F2: Jos $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{F}$, niin on olemassa joukot I_Φ, I_Ψ, joilla $I_\Phi \subset \Delta_1$ ja $I_\Psi \subset \Delta_2$. Nyt $I_{\Phi\cap\Psi} \subset \Delta_1 \cap \Delta_2$.
F3: Tämä kohta seuraa suoraan relaation $\subset$ transitiivisuudesta.

Oletetaan jatkossa, että $\mathcal{U}$ on suodattimesta $\mathcal{F}$ lemman 5.39 avulla saatu ultrasuodatin.

5.46. Lemma. Kuvaus $\models_{\mathcal{M}^J/\mathcal{U}}$ on äärellisluonteinen.

Todistus. Olkoon $\Phi \subset L$ mielivaltainen ja olkoot $\{\Psi_k \mid k \in K\}$ joukon Φ äärellisten osajoukkojen perhe. Osoitetaan, että $\varphi \notin \models_{\mathcal{M}^J/\mathcal{U}} (\Phi)$, jos $\varphi \notin \models_{\mathcal{M}^J/\mathcal{U}} (\Psi_k)$ kaikilla $k \in K$.

Oletetaan, että jokaisella $k \in K$ on olemassa $\mathcal{M}^J/\mathcal{U}$-tulkinta h_k, jolla $h_k(\Psi_k) \subset F^J/\mathcal{U}$ ja $h_k(\varphi) \notin F^J/\mathcal{U}$. Merkitään symbolilla $\wedge\Psi_k$ joukon Ψ_k lauseiden konjunktiota. Nyt selvästikin pätee

$$h_k(\wedge\Psi_k \wedge \neg\varphi) \in F^J/\mathcal{U}$$

kaikilla $k \in K$. Lemma 5.45 nojalla jokaisella $k \in K$ on olemassa $\mathcal{M}$-tulkinta h_{Ψ_k}, jolla

$$h_{\Psi_k}(\wedge\Psi_k \wedge \neg\varphi) \in F.$$

Määritellään sitten jokaista $j \in J$ kohti kuvaus $h_j : L \mapsto A$ kaavalla

$$h_j(\psi) = h_{j\cap\Phi}(\psi).$$

Kuvaukset h_j ovat selvästikin $\mathcal{M}$-tulkintoja. Lemman 5.44 nojalla kuvaus h^+ on homomorfismi. Huomataan myös, että kuvaukselle h^+ pätee

$$h^+(\wedge\Psi_k \wedge \neg\varphi) \in F^J/\mathcal{U}$$

kaikilla $k \in K$. Tämä seuraa siitä, että

$$I_{\Psi_k} \subset \{j \in J \mid h_j(\wedge\Psi_k \wedge \neg\varphi) \in F\}$$

ja $I_{\Psi_k} \in \mathcal{U}$. Näin ollen $h^+(\Phi) \subset F^J/\mathcal{U}$ ja $h^+(\varphi) \in F^J/\mathcal{U}$. Siispä myös $\varphi \notin\, \models_{\mathcal{M}^J/\mathcal{U}} (\Phi)$. □

5.47. Lemma. Oletetaan, että kuvaus $\models_{\mathcal{M}}$ on äärellisluonteinen ja lisäksi $\vdash_\Phi (\emptyset) = \models_{\mathcal{M}} (\emptyset)$. Tällöin $\vdash_\Phi = \models_{\mathcal{M}}$.

Todistus. Olkoon Ψ mielivaltainen lausejoukko ja φ lause. Oletetaan, että $\varphi \notin\, \models \mathcal{M}(\Psi)$. Tällöin on olemassa $h_0 : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{A}$, jolle $h_0(\Psi) \subset F$ ja $h_0(\varphi) \notin F$. Käydään läpi kaksi tapausta:

(1) $h_0(F) \not\subset F$. Nyt on olemassa $\psi \in \Phi$, jolla $h_0(\psi) \notin F$. Lause ψ ei näin ollen ole tosi mallissa $\mathcal{M}$, jolloin oletuksen nojalla $\psi \notin\, \vdash_\Phi (\emptyset)$, vaikka $\psi \in\, \vdash_\Phi (\emptyset)$.

(2) $h_0(F) \subset F$. Nyt $h_0(\Phi \cup \Psi) \subset F$. Näin ollen $\varphi \notin\, \vdash_\Phi (\Psi)$.

Oletetaan seuraavaksi, että $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\Psi)$. Oletuksen nojalla on olemassa äärellinen $\{\psi_0', \psi_1', ..., \psi_n'\} = \Psi' \subset \Psi$, jolle $\varphi \in \models_{\mathcal{M}} (\Psi')$. Näin ollen

$$\text{kaikilla } h : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{A} \text{ pätee: jos } h(\Psi') \subset F, \text{ niin } h(\varphi) \in F$$

ja edelleen

$$\text{kaikilla } h : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{A} \text{ pätee: } h((\psi_0' \wedge \psi_1' \wedge ... \wedge \psi_n') \rightarrow \varphi) \in F.$$

Lause $(\psi_0' \wedge \psi_1' \wedge ... \wedge \psi_n') \rightarrow \varphi$ on siis tosi mallissa $\mathcal{M}$, jolloin oletuksen ja lemman 4.2 nojalla $\varphi \in \vdash_\Phi (\{\psi_0' \wedge \psi_1' \wedge ... \wedge \psi_n'\})$. Edelleen lemman 4.14 nojalla $\varphi \in \vdash_\Phi (\Psi')$, jolloin $\varphi \in \vdash_\Phi (\Psi)$. $\square$

5.48. Lemma. Olkoon $\vdash_\Phi$ syntaktinen seurauskuvaus. Kuvauksella $\vdash_\Phi$ on heikosti yhdenmukainen malli, jos ja vain jos kuvauksella $\vdash_\Phi$ on yhdenmukainen malli.

Todistus. Heikosti yhdenmukaisen mallin olemassaolo seuraa suoraan yhdenmukaisen mallin olemassaolosta.

Oletetaan, että kuvauksella $\vdash_\Phi$ on heikosti yhdenmukainen malli $\mathcal{M}$. Tällöin $\vdash_\Phi (\emptyset) = \models_{\mathcal{M}} (\emptyset)$. Lemman 5.45 nojalla $\vdash_\Phi (\emptyset) = \models_{\mathcal{M}^J/\mathcal{U}} (\emptyset)$ ja edelleen lemman 5.47 nojalla $\vdash_\Phi = \models_{\mathcal{M}^J/\mathcal{U}}$. $\square$

5.49. Lause III. Sellaisia syntaktisia seurauskuvauksia, joilla on yhdenmukainen malli, on ylinumeroituva määrä.

Todistus. Tulos seuraa edellisestä lemmasta ja lemmasta 5.35. $\square$

6. Lähdeluettelo

[1] Bloom, S. L. & Suszko, R.: Investigations into the Sentential Calculus with Identity, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **13** (1972), s. 289-308.

[2] Suszko, R.: Adequate Models for the non-Fregean Sentential Calculus (SCI), *Logic Language and Probability. A selection of papers of the 4th international congress for logic, methodology and philosophy,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1973, s. 49-54.

[3] Golińska-Pilarek, J.: Number of non-Fregean sentential logics that have adequate models, *Mathematical Logic Quarterly 52(5)* s.439-443.

[4] Golińska-Pilarek, J. & Huuskonen, T.: Number of Extensions of non-Fregean Logics, `http://www.helsinki.fi/~huuskone/nonfrege.pdf.`

[5] Suszko, R.: Abolition of the Fregean Axiom, *Logic Colloquium 1972-73*, A. Dold & B. Eckmann, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1975 s. 169-239.

[6] Väänänen, J.: Matemaattinen logiikka, luentomoniste.

[7] Frege, G.: Über Sinn und Bedeutung, englanninkielinen käännös teoksessa Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege, *BASIL BLACKWELL, OXFORD*, 1970.

[8] Roman Suszko and the non-Fregean Logics, `http://www.ontology.co/suszkor.htm.`

[9] Wittgenstein, L.: Tractatus Logico-Philosophicus, kaksi englanninkielistä käännöstä osoitteessa `http://people.umass.edu/klement/tlp/.`

[10] Suszko, R.: Ontology in the Tractatus of L. Wittgenstein, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **9** (1968), s. 7-33.

[11] Suszko, R.: Non-Fregean Logic and Theories, *Acta Logica*, Analele Universitatii Bucuresti, ANUL XI (1968), s. 105-125.